QUINTANA ROO
GOBIERNO DEL ESTADO
2016 • 2022

MÁS Y MEJORES OPORTUNIDADES

COLEGIO DE BACHILLERES

CUADERNILLO DE

MATEMÁTICAS II

II

SEMESTRE

Nombre: ____________________

Grupo: ____________________

Directorio

Dr. Rafael Ignacio Romero Mayo
Director General

Mtra. Yolanda del Rosario Loría Marín
Directora Académica

Lic. Mario Velázquez George
Subdirector Académico

Mtra. Cindy Jazmín Cuellar Ortiz
Jefa del Departamento de Docencia y Apoyo Académico

Elaboración, revisión y aprobación:

Mtro. Antonio Puc Pool, **Docente del Plantel Tihosuco**
Mtro. Juan Enrique Estrella Cetina, **Docente del Plantel Bacalar**
Ing. Gustavo Kanxoc Dzib, **Docente del Plantel Ignacio Zaragoza**
Mtra. Leticia María Ávila Peraza, **Docente del Plantel Isla Mujeres**
Mtro. Jairo Isaí Pacheco Pérez, **Docente del Plantel Sabán**
Lic. Inés Carreón Martínez, **Docente del Plantel Cancún Cuatro**

Revisión y Actualización:
Mtro. Antonio Puc Pool, **Docente del Plantel Tihosuco**
Mtra. Jessica Vianey Cortés Talamantes, **Jefa de Materia del Área de Matemáticas**

Diseño de portada:
Lic. Juan Naim Góngora Piña, **Responsable del Área de Comunicación y Difusión**

Avenida Héroes #310 entre Justo Sierra y Bugambilias
Col. Adolfo López Mateos
Chetumal, C.P. 77010, Othón P. Blanco, Quintana Roo

PRESENTACIÓN

Estimada y estimado estudiante:

Me es grato darte la bienvenida al nuevo semestre que estás por iniciar. En la Dirección General del Colegio de Bachilleres de Quintana Roo, somos conscientes de las circunstancias que te rodean y que han afectado al mundo desde hace más de año y medio; por ello, el cuadernillo que ahora posees, es producto de un esfuerzo y trabajo conjuntos entre los docentes y los responsables de las áreas académicas de nuestras oficinas centrales.

Si bien es cierto la pandemia continúa, ello no representa un impedimento para no cumplir con nuestra labor educativa, razón esencial de nuestra gran institución. Por ello, hoy más que nunca, la labor académica es vital para alcanzar nuestro principal objetivo: tu formación escolar que contribuya a consolidar tu proyecto de vida.

El contenido de este *Material didáctico del estudiante*, te permitirá continuar con tu proceso de enseñanza-aprendizaje desde casa. Por supuesto, estarás respaldado por la asesoría y seguimiento de cada uno de tus docentes y autoridades educativas.

Cada una de las personas que laboramos en el Colegio de Bachilleres del Estado de Quintana Roo ponemos lo mejor de nosotros para seguir caminando juntos, aun en la pandemia, generando resiliencia y fortaleciendo las competencias académicas y socioemocionales que nos permitan salir adelante.

Te invito a no bajar la guardia en lo académico y en el cuidado de tu salud. Trabaja intensamente, con compromiso y con responsabilidad; sé responsable y perseverante, ello te llevará al éxito y a cumplir tus metas. Te deseo lo mejor para este semestre que inicia.

Dr. Rafael Ignacio Romero Mayo
Director General

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

Nuestro compromiso es continuar generando estrategias que te permitan fortalecer los aprendizajes de las diversas asignaturas, por esta razón ponemos a tu disposición este documento, el cual se construyó con la participación de maestras y maestros del área de matemáticas de todo el estado, quienes con mucha dedicación y esfuerzo diseñaron actividades tomando en consideración los aprendizajes esperados y las competencias de los programas de estudio y que estamos seguros te permitirán continuar con tu formación académica.

Es importante mencionar que, este cuadernillo contiene una serie de actividades que te permitirán alcanzar los aprendizajes esperados de la asignatura de Matemáticas 2, daremos un recorrido por los conceptos básicos de la geometría y trigonometría, dos ramas importantes de las matemáticas que te permitirán comprender su importancia y relación con la vida cotidiana.

Esta asignatura se compone de 6 bloques en los cuales recordarás algunos conceptos vistos en tu paso por la secundaria tales como: triángulos, ángulos, circunferencia, puntos, rectas, por mencionar algunos. Cada actividad contiene una lectura previa que te permitirá comprender los contenidos principales, posteriormente encontrarás las instrucciones precisas para desarrollarla y la descripción del instrumento con la que será evaluada. Se hace énfasis en que practiques el proceso de autoevaluación, de tal manera que puedas reflexionar sobre las dificultades a las que te enfrentaste y los aprendizajes que lograste al final de cada bloque, no olvides tomar nota en tu libreta de todo aquello que observaste en tu proceso de aprendizaje para que posteriormente puedas comentar con tu maestra o maestro.

También, considera dos herramientas básicas para el desarrollo de las actividades como lo son: tener a la mano un juego de geometría o cualquier objeto que te permita realizar trazos en tu libreta, así como recuperar la calculadora científica del semestre anterior para realizar algunos cálculos matemáticos implicados en las actividades sobre valores de las razones trigonométricas.

Te recomendamos dedicar un horario determinado de estudio ya que las realizarás a través de la autogestión, encuentra un espacio en casa que te permita estar cómodo y con el menor número de distracciones, así como revisa las instrucciones de cada actividad para completarla con éxito.

Recuerda que las matemáticas son importantes en tu formación, pues promueven el razonamiento, al mismo tiempo desarrolla tu capacidad de análisis, tu pensamiento crítico, tomar decisiones informadas e imaginar soluciones posibles a problemas. Algunas actividades te pueden parecer fáciles, otras quizá más difíciles, pero no te desanimes, con un poco de esfuerzo y perseverancia estamos seguros que podrás concluirlas satisfactoriamente.

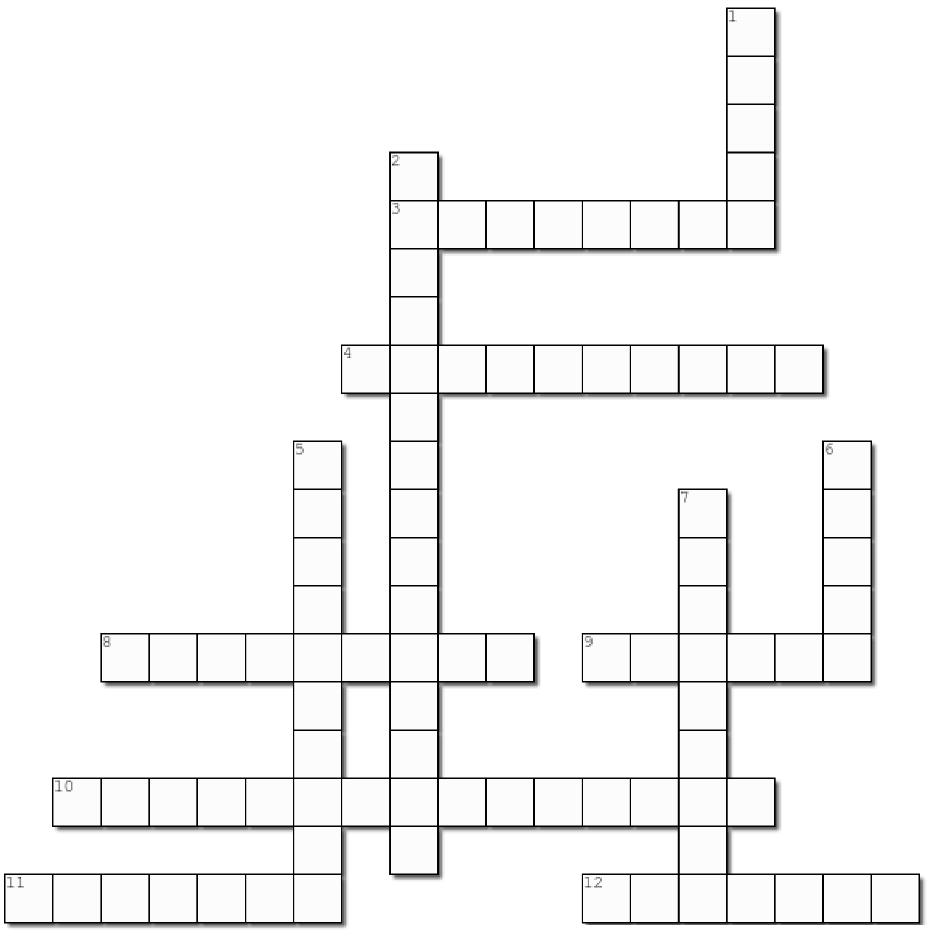
Finalmente, es necesario que te mantengas comunicado con tu maestro o maestra para establecer las fechas y los mecanismos de entrega, así como los criterios de evaluación, no te sientas solo, estamos para apoyarte y acompañarte en este camino.

¡Éxito!

¿CON QUÉ CONOCIMIENTOS PREVIOS CUENTO?

Instrucciones

El propósito de esta sección es reflexionar acerca de los conocimientos previos con los que cuentas. Resuelve el siguiente crucigrama:



Created using the Crossword Maker on TheTeachersCorner.net

Horizontal

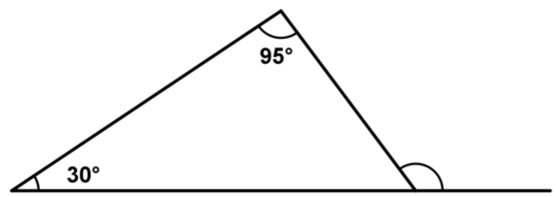
3. Triángulo que tiene sus 3 lados diferentes
4. Triángulo que tiene un lado recto
8. Rectas que se desplazan en la misma dirección, nunca se encuentran o tocan en ningún punto
9. Ángulo de más de 90 grados y menos de 180°
10. Par de ángulos cuya suma es igual a 90 grados
11. Figura geométrica cuya área es igual al valor de su radio elevado al cuadrado, multiplicado por el valor de Pi
12. Es el segmento que une el centro del polígono con el centro de cualquiera de sus lados

Vertical

1. Ángulo que mide menos de 90 grados
2. Son rectas que se cortan en un ángulo de 90°.
5. Triángulo que tiene sus 3 lados iguales
6. Ángulo que mide 90 grados
7. Polígono de 5 lados y 5 vértices

II. Resuelve los siguientes ejercicios escribiendo el procedimiento completo en tu cuaderno.

a) ¿A qué horas deberán marcar las manecillas de los relojes para que se formen los siguientes ángulos? 1) Agudo 2) Recto 3) Llano 4) Entrante 5) Perígono
b) Determina el área de un triángulo equilátero que mide 12 cm de lado
c) Calcula el valor del ángulo exterior “x” de la siguiente figura:



III. Presta atención a los espacios de tu casa y menciona 3 ejemplos en donde observes diferentes figuras geométricas. Dibújalos a escala

BLOQUE I. Ángulos y triángulos

Actividad 1

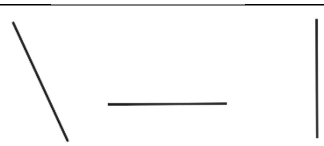
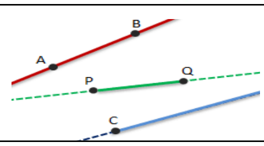
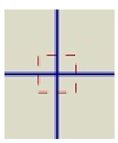
- **Aprendizaje Esperado:** Aplica los conceptos básicos de la geometría y la clasificación de los ángulos y su sistema de medición para resolver ejercicios y problemas relacionados con su entorno.
- **Atributo (s):** 1.1 Enfrenta las dificultades que se le presentan y es consciente de sus valores fortalezas y debilidades/ 4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.
- **Conocimiento (s):** Ángulo: sistema de medición/ clasificación

Lectura previa

GENERALIDADES DE LA GEOMETRÍA

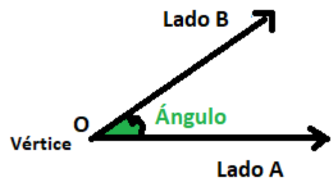
Para iniciar con el estudio de los ángulos y figuras geométricas es importante conocer el concepto de geometría y algunas de sus generalidades más importantes.

Geometría. Rama de las matemáticas que se encarga de estudiar las propiedades y las medidas de una figura en un plano o en un espacio.

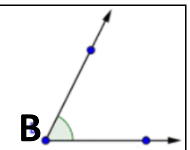
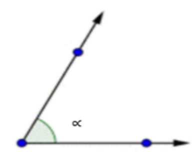
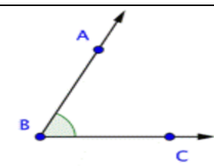
Dibujo	Concepto	Descripción
	Punto	La marca más diminuta que se puede dibujar, no tiene ubicación, longitud, anchura ni altura
	Recta	Puede ser la imagen de un rayo luminoso, el filo de una regla, se extiende en dos sentidos, no comienza y sus puntos conservan la misma dirección
	Plano	Es el corte más delgado posible de una superficie y puede ser una pared, un piso, etc.
	Semirrecta	Tiene un punto de origen y se prolonga hacia el infinito en el otro extremo
	Segmento de Recta	Recta cortada por dos puntos
	Paralelas	Rectas que se desplazan en la misma dirección.
	Perpendiculares	Son rectas que se cortan en un ángulo de 90°.
	Espacio	Estamos inmersos en él, es todo lo que nos rodea y es ilimitado

ÁNGULOS

¿Qué es un ángulo? Un ángulo es la parte del plano comprendida entre dos semirrectas que tienen el mismo punto de origen llamado **vértice**.



Para notar o distinguir un ángulo podemos utilizar:

Una letra mayúscula situada prácticamente en el vértice El ángulo B	
Una letra griega dentro del ángulo El ángulo ∝ (se lee alfa)	
Tres letras mayúsculas de manera que quede en medio la letra situada en el vértice del ángulo. El ángulo ABC	

Para sustituir la palabra ángulo se utiliza el símbolo $\sphericalangle$ que se lee ángulo y se coloca en la testa de la letra o letras que lo designan. A veces, se antepone el símbolo $\wedge$ a la letra que designa al ángulo.
Ejemplo:

- El ángulo A se puede escribir como $\hat{A}$ o también $\sphericalangle A$
- El ángulo ABC se puede escribir también como $\widehat{ABC}$

SISTEMAS DE MEDICIÓN

El sistema sexagesimal es uno de los sistemas más empleados para medir ángulos y consiste en dividir una circunferencia en 360 partes iguales llamadas **grados**; el grado en 60 partes iguales llamados **minutos** y cada minuto en 60 partes iguales llamados **segundos.**

Símbolo de unidades	
Grado	°
Minutos	′
Segundos	″

El instrumento para medir un ángulo en grados sexagesimales se denomina **transportador**: También suele usarse otra unidad de medida para medir un ángulo llamado **radián** y se mencionará en los bloques siguientes.

CLASIFICACIÓN DE LOS ÁNGULOS

Los ángulos se clasifican en tres grupos y son:

- Por sus medidas o (abertura)
- Por la suma de sus medidas
- Por la posición de sus lados

a) **Clasificación por sus medidas o abertura**.

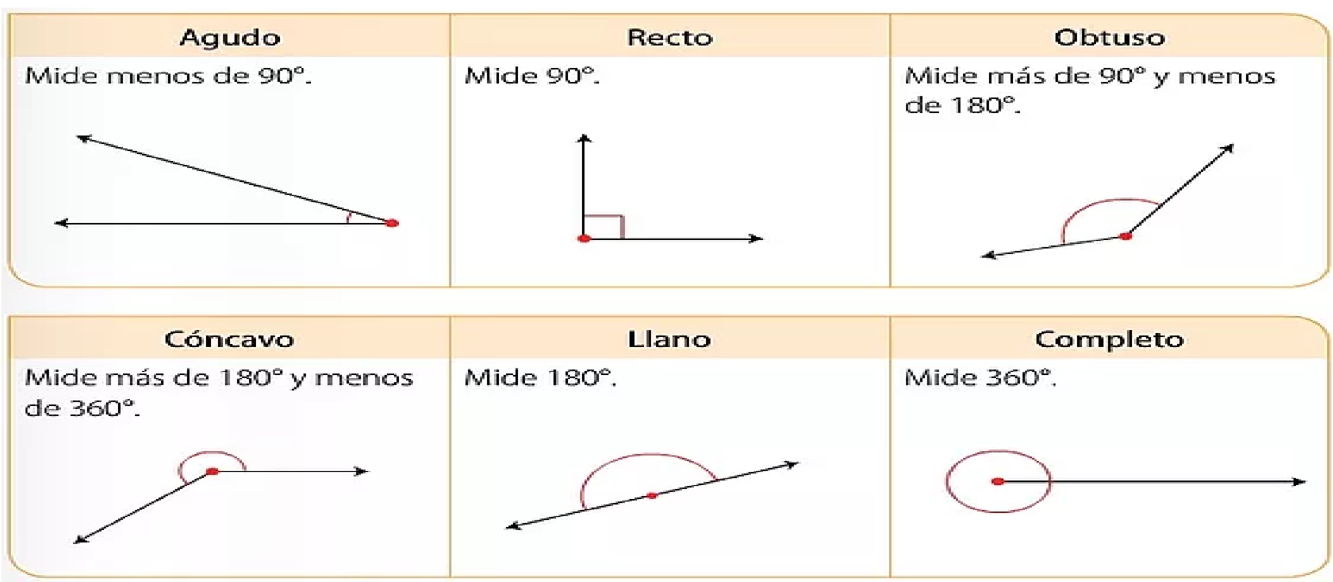


Figura tomada de TOMi. Digital Juan Carlos Olarte Rodríguez

b) Por la suma de sus medidas

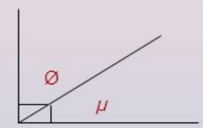
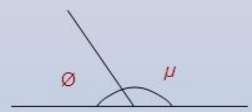
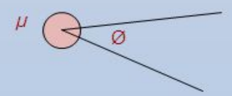
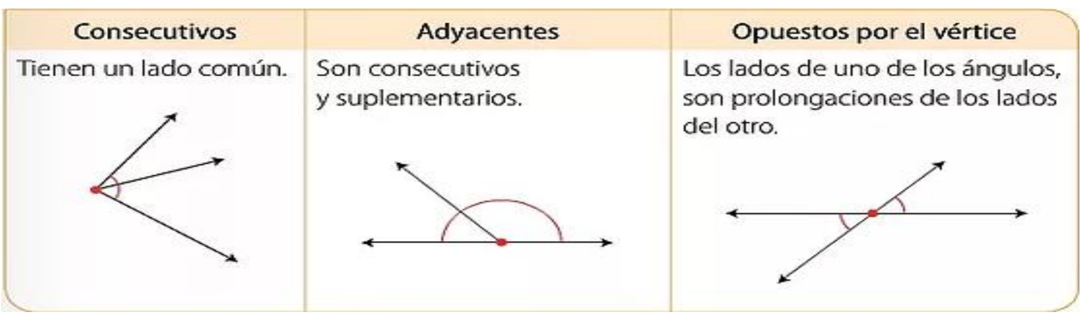
Nombre	Suma de medidas	Imagen
Complementarios	µ +Ø = 90° **La suma de los ángulos es igual 90°**	
Suplementarios	µ+Ø = 180° **La suma de los ángulos es igual 180°**	
Conjugados	µ+Ø = 360° **La suma de los ángulos es igual 360°**	

Figura tomada de Yolanda Rodríguez Cruz, profesora del CECyT No. 13 Ricardo Flores Magón

c) Por la posición de sus lados



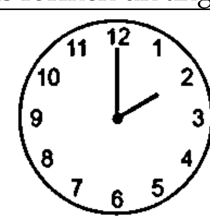
Consecutivos	Adyacentes	Opuestos por el vértice
Tienen un lado común.	Son consecutivos y suplementarios.	Los lados de uno de los ángulos, son prolongaciones de los lados del otro.

Figura tomada de TOMi. Digital Juan Carlos Olarte Rodríguez

Actividad 1.1

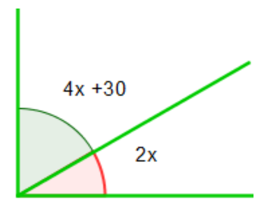
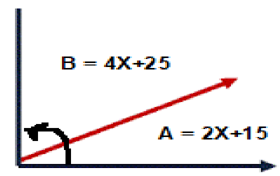
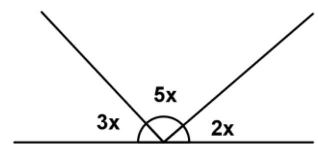
Instrucciones

I. Copia en tu libreta y resuelve lo que se te solicite en cada uno de los siguientes ejercicios, considerando los conceptos de los diferentes ángulos según su clasificación.

1.- En el reloj de la derecha considerando que la manecilla que marca la hora no se mueve, mientras que el minutero si lo hace ¿cuánto tiempo debe pasar para que las manecillas formen un ángulo		
a) Llano b) Recto c) De una vuelta	Respuesta ____________ Respuesta ____________ Respuesta ____________	

<table>
<tr><td colspan="2">2.- Encuentra el valor de cada ángulo, considerando el concepto de ángulos complementarios y suplementarios</td></tr>
<tr><td>Encuentra el valor de cada ángulo si A= 2x y B= 4x + 30
$2x + 4x + 30 = 90$
$6x + 30 = 90$
$6x = 90 - 30$
$6x = 60$
$\frac{6x}{6} = \frac{60}{6}$
$x = 10$
Entonces x = 10 por lo tanto al sustituir 10 en la ecuación A y B debe sumar igual 90°</td><td>A= 2x
2(10) = 20

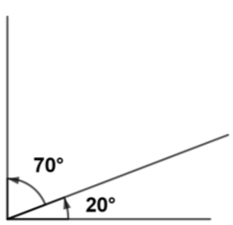
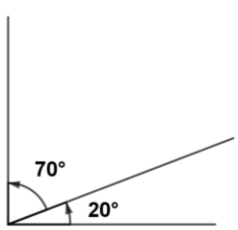
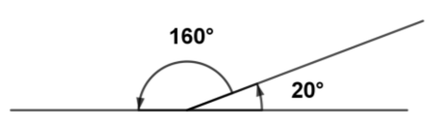
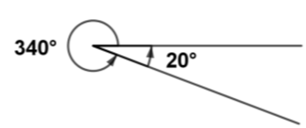
B= 4x+ 30
4(10) + 20
=70

A + B = 90°
20 + 70 = 90

</td></tr>
<tr><td>3. Determina el valor del ángulo si $A = 2x + 15$ y $B = 4x + 25$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>4. Calcula el valor de cada ángulo si $A = 2x, B = 3x\ y\ C = 5x$</td><td>
</td></tr>
</table>

Ejemplo 1

En la siguiente tabla observa cómo a partir de un ángulo de 20° se halla los ángulos complementarios, suplementarios y conjugado.

Dato inicial es 20° al sumarle 70° hace un total de 90° para un ángulo complementario
Dato inicial es 20° al sumarle 160° hace un total de 180° para un ángulo suplementario
Dato inicial es 20° al sumarle 340° hace un total de 180° para un ángulo conjugado.

Ángulo	Complemento	Suplemento	Conjugado
20°	70°	160°	340°
			

Actividad 1.2

Instrucciones

I. Copia en tu libreta y resuelve según lo que se te solicite en cada uno de los siguientes ejercicios, considerando los conceptos de los ángulos complementarios, suplementarios y conjugados.

Utiliza tu transportador y completa cada una de las columnas a partir del ángulo dado. Ilustra tu respuesta con un dibujo.

Ángulo	Complemento	Suplemento	Conjugado
42°			

Ángulo	Complemento	Suplemento	Conjugado
120°			

Ángulo	Complemento	Suplemento	Conjugado
210°			

Los ángulos los utilizamos o vemos diariamente en nuestra vida cotidiana:

- Las intersecciones de las calles forman ángulos.
- Las puertas y ventanas abatibles forman un ángulo con el marco.
- Las calles empinadas forman un ángulo con la horizontal.
- Las escaleras de mano forman un ángulo con el muro en el que se apoyan.
- Las esquinas forman ángulos rectos generalmente.
- El sol, la luna y los astros forman un ángulo con el horizonte que va de cero a 180 grados desde el alba al ocaso a medida que la tierra rota.
- Las orientaciones de casas, edificios, caminos, etcétera forman un ángulo en relación con el norte magnético.
- Al conducir un auto, mueves el volante para dar vuelta, un determinado ángulo.
- Cuando metes la llave en la cerradura, tiene que estar perpendicular a ésta.
- Las manecillas del reloj forman distintos ángulos para dar la hora.

Actividad 1.3

Instrucciones

I. Copia cada ejercicio en tu libreta y contesta según la instrucción de cada uno

1. Escribe en la línea si los siguientes ángulos son agudos, rectos u obtusos:

a) 27°____________ **d)** 95°__________
b) 145° ___________ **e)** 45°___________
c) 90° _____________ **f)** 270°____________

2. Comprueba si los siguientes ángulos son complementarios:

a) 34° y 56° ___________ **c)** 45° y 55° __________
b) 89° y 11° ___________ **d)** 23° y 67°__________

3. Escribe en la línea si los ángulos son o no suplementarios:

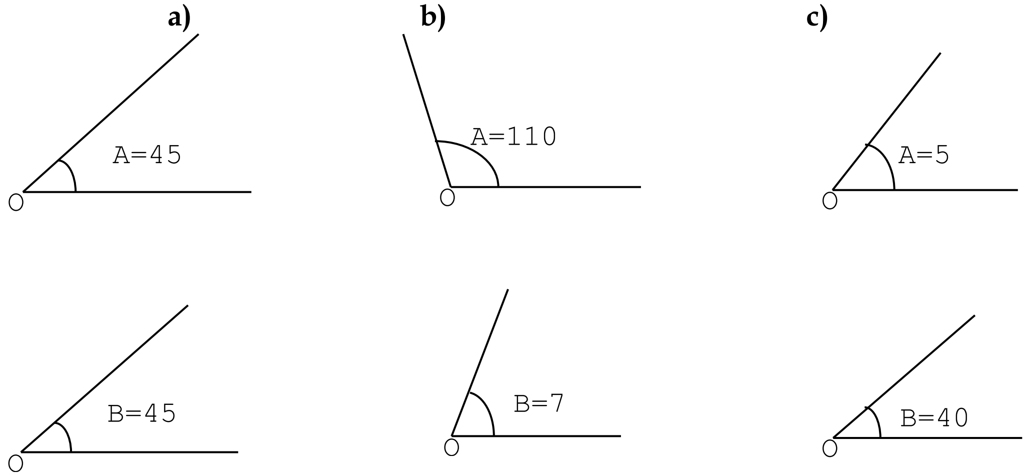
a) 134° y 56°_______________ **c)** 84° y 96°_________________
b) 96° y 45° ______________ **d)** 73° y 17°_________________

4. Subraya los incisos que sumados den como resultado un ángulo suplementario.

a) 12° **d)** 145°
b) 35° **e)** 13°
c) 123° **f)** 90°

5. Subraya el inciso que sumando A y B forman un ángulo complementario

a) **b)** **c)**



Evaluación:

- Se utilizará el instrumento de evaluación 1

Actividad 2

- **Aprendizaje Esperado:** Aplica los conceptos básicos de la geometría y la clasificación de los ángulos y su sistema de medición para resolver ejercicios y problemas relacionados con su entorno.
- **Atributo (s):** 1.1 Enfrenta las dificultades que se le presentan y es consciente de sus valores fortalezas y debilidades/ 4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.
- **Conocimiento (s):** Rectas paralelas cortadas por una transversal

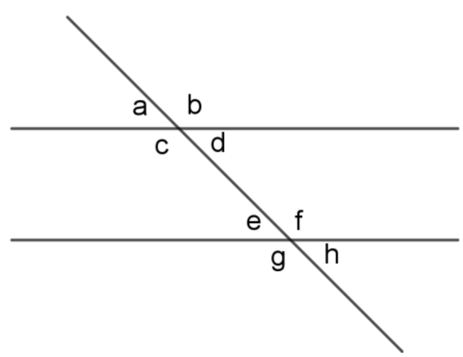
Lectura previa

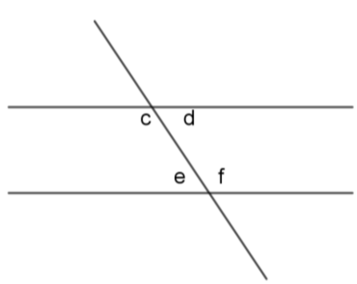
Lee con atención el siguiente texto:

RECTAS PARALELAS CORTADAS POR UNA TRANSVERSAL

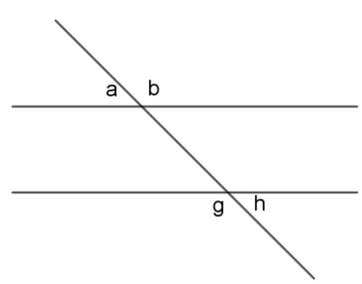
Estos ángulos tienen especial importancia en geometría y trigonometría porque nos ayudan a resolver varias situaciones que se presentan en los triángulos y las figuras geométricas. Para diferenciarlos se ha clasificado por pares: ángulos **internos**, ángulos **externos** ángulos **correspondientes**, ángulos **alternos internos**, ángulos **alternos externos y** ángulos **colaterales o conjugados**

Nombremos los ángulos que se forman con las letras que están en la figura de abajo y enseguida separemos en dos grupos de ángulos: internos y externos





Ángulos internos



Ángulos externos

Figura tomada de Jiménez, R. (2007). *Geometría y Trigonometría*. Estado de México: Pearson

Los ángulos correspondientes son iguales entre si

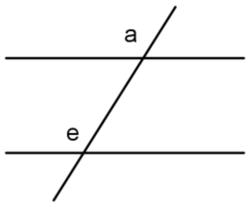
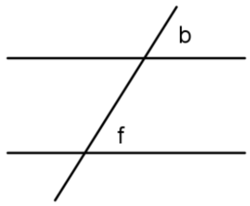
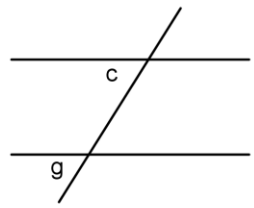
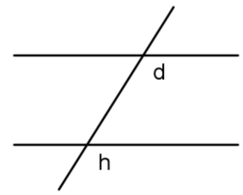
Ángulos correspondientes			
 $a = e$	 $b = f$	 $c = g$	 $d = h$

Figura tomada de Jiménez, R. (2007). *Geometría y Trigonometria.* Estado de México: Pearson

Los ángulos alternos internos, situados de un lado y el otro de la transversal, son iguales entre sí, como se puede observar en la siguiente imagen.

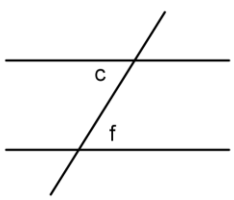
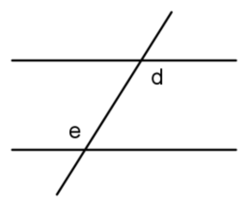
Ángulos alternos internos	
 $\boldsymbol{c = f}$	 $\boldsymbol{d = e}$

Figura tomada de Jiménez, R. (2007). *Geometría y Trigonometria.* Estado de México: Pearson

Los ángulos alternos externos, situados de un lado y el otro de la transversal, son iguales entre sí, como se puede observar en la siguiente imagen.

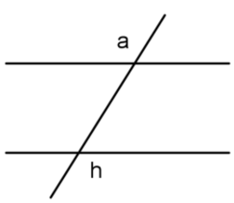
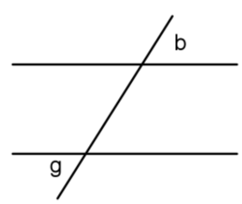
Ángulos alternos externos	
 $\boldsymbol{a = h}$	 $\boldsymbol{b = g}$

Figura tomada de Jiménez, R. (2007). *Geometría y Trigonometria.* Estado de México: Pearson

Los ángulos colaterales, situados del mismo lado de la transversal son suplementarios entre sí, como se puede observar en la siguiente imagen.

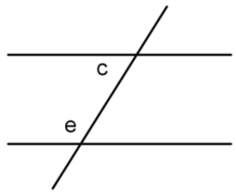
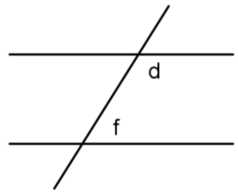
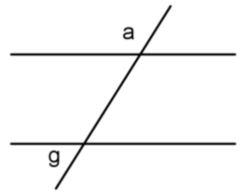
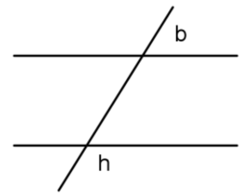
Ángulos colaterales			
 $c + e = 180°$	 $d + f = 180°$	 $a + g = 180°$	 $b + h = 180°$

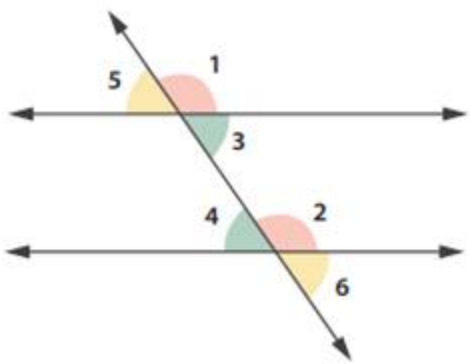
Figura tomada de Jiménez, R. (2007). *Geometría y Trigonometria.* Estado de México: Pearson

Actividad 2

Instrucciones

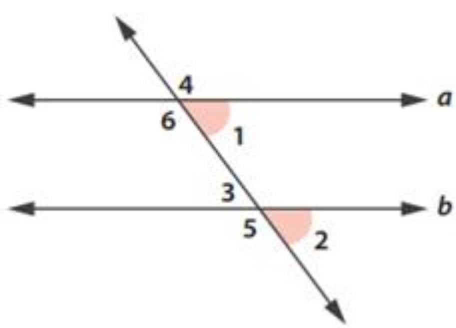
I. Copia cada uno de los ejercicios en tu libreta y resuelve según lo que se indica en ella.

1.- Observe el gráfico y siguiendo la numeración que aparece en el mismo, une con una línea según corresponda



Ángulos correspondientes	$\angle 3$ y $\angle 5$
Ángulos alternos internos	$\angle 1$ y $\angle 2$
Ángulos alternos externos	$\angle 3$ y $\angle 4$
Ángulos opuestos por el vértice	$\angle 1$ y $\angle 5$
Ángulos suplementarios	$\angle 6$ y $\angle 5$

2.- Ten en cuenta la figura y escribe verdadero (V)o falso (F)a cada afirmación



a) ☐ Los ángulos $\angle 1$ y $\angle 2$ son correspondientes.

b) ☐ Los ángulos $\angle 4$ y $\angle 2$ son alternos externos.

c) ☐ Los ángulos $\angle 1$ y $\angle 3$ son alternos internos.

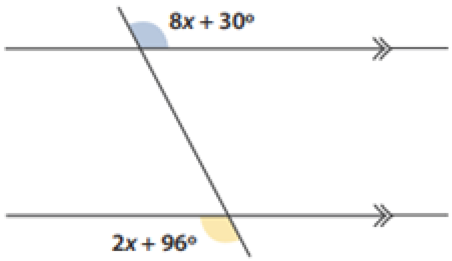
d) ☐ Los ángulos $\angle 1$ y $\angle 6$ son suplementarios.

e) ☐ Los ángulos $\angle 3$ y $\angle 5$ son opuestos por el vértice.

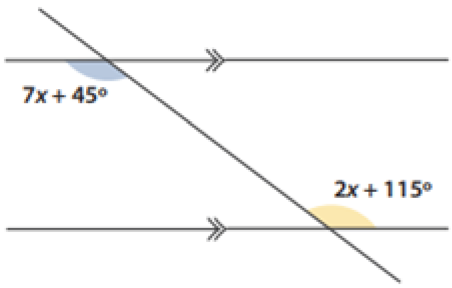
Figuras tomadas de internet aprende.colombiaaprende.edu.co/sites.

3. Encuentra el valor de x en cada caso

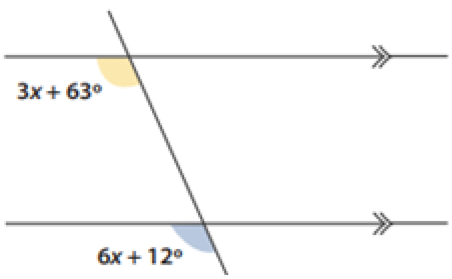
a)



b)



c)



Figuras tomadas de internet aprende.colombiaaprende.edu.co/sites.

Evaluación:

- Se utilizará el instrumento de evaluación 2

Actividad 3

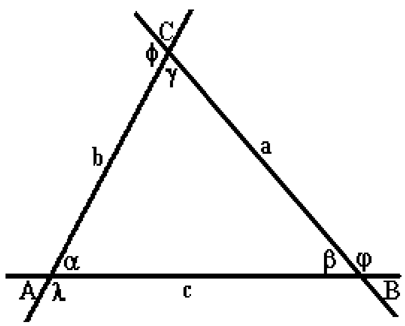
- **Aprendizaje Esperado:** Resuelve problemas usando los criterios de congruencia y semejanza relacionados con objetos de su entorno
- **Atributo (s):** 1.1 Enfrenta las dificultades que se le presentan y es consciente de sus valores, fortalezas y debilidades / 4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.
- **Conocimiento (s):** Triángulos/ clasificación y propiedades/ rectas y puntos notables

Lectura previa

Lee con atención el siguiente texto:

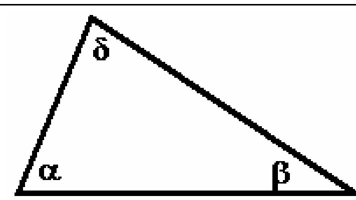
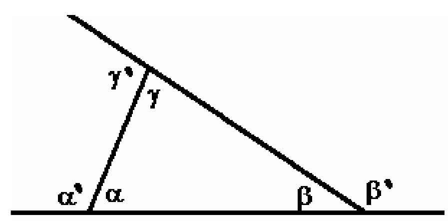
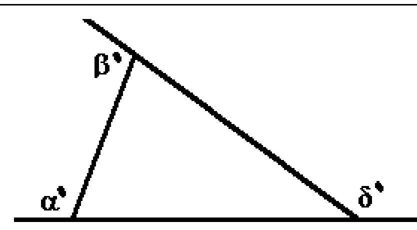
Triángulo

Un triángulo es la unión de tres rectas que se cortan de dos en dos y que forman entre si tres ángulos.

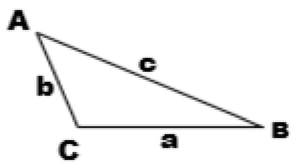


Elementos primarios del triángulo
Lados: a , b , c
Ángulos interiores: α , β , γ
Ángulos exteriores: λ , φ , ϕ

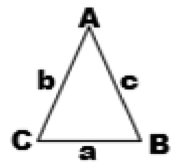
Teoremas

1) La suma de las medidas de los ángulos interiores de un triángulo es 180º	**$\delta + \beta + \alpha = 180^0$**	
2) Todo ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de los ángulos interiores no adyacentes	$\gamma' = \alpha + \beta$ $\alpha' = \beta + \gamma$ $\beta' = \alpha + \gamma$	
3) La suma de las medidas de los ángulos exteriores de un triángulo es 360º	**$\delta` + \beta` + \alpha` = 360^0$**	

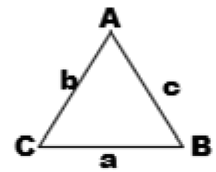
CLASIFICACIÓN DE LOS TRIÁNGULOS POR LA MEDIDA DE SUS LADOS



Escaleno
Tiene sus 3 lados diferente

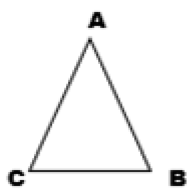


Isósceles
Tiene 2 lados iguales

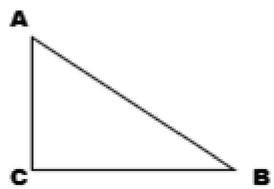


Equilátero
Tiene sus 3 lados iguales

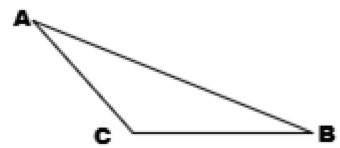
CLASIFICACIÓN DE LOS TRIÁNGULOS POR LA MEDIDA DE SUS ÁNGULOS



Acutángulos
Tiene 3 ángulos agudos

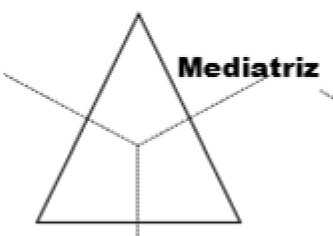


Rectángulos
Tiene 1 ángulo recto

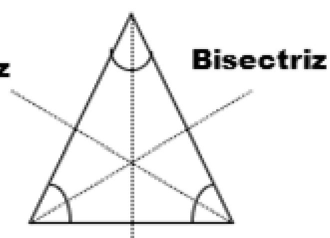


Obtusángulo
Tiene 1 ángulo obtuso

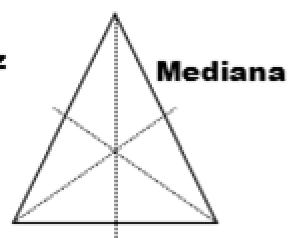
PUNTOS NOTABLES DEL TRIÁNGULO



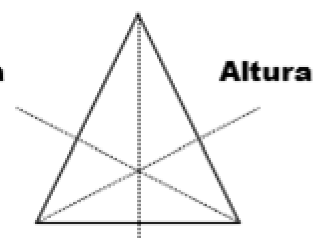
Circuncentro



Incentro



Baricentro



Ortocentro

RECTAS Y PUNTOS NOTABLES EN UN TRIÁNGULO

Todos los triángulos tienen 3 alturas, 3 medianas, 3 mediatrices y 3 bisectrices, que se le denominan rectas notables y forman un punto.

- **Altura.** Segmento de recta perpendicular al lado y que pasa por el vértice opuesto.
- **Ortocentro.** Es el punto en el cual las alturas se intersecan o cruzan.
- **Medianas.** Es el segmento de recta que une un vértice con el punto medio del lado opuesto y se le llama mediana correspondiente a ese lado.
- **Baricentro.** Es el punto en el cual las medianas se cruzan o intersecan.
- **Mediatriz.** Segmento de recta que es perpendicular a cada lado del triángulo y que pasa exactamente por el punto medio.

- **Circuncentro.** Es el punto en donde las mediatrices se cruzan o intersecan y este es el centro de la circunferencia circunscrita.
- **Bisectriz.** Segmento de recta que divide cada ángulo del triángulo en dos partes iguales.
- **Incentro.** Es el lugar en el cual las bisectrices se cruzan o intersecan y este punto es el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo.

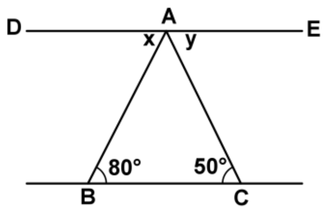
Actividad 3

Instrucciones

I. Copia y resuelve en tu libreta cada uno de los ejercicios y selecciona la respuesta correcta (subraya)

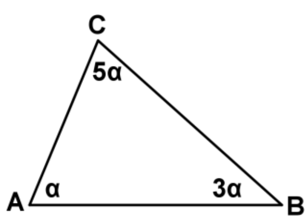
1. En la figura, DE // BC. Entonces cuánto vale el ángulo A

A) 15º
B) 30º
C) 45º
D) 60º
E) 50°



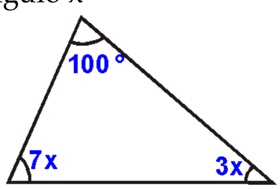
2. En el triángulo ABC de la figura, la medida del ángulo α es:

A) 10º
B) 15º
C) 20º
D) 25º
E) 30º



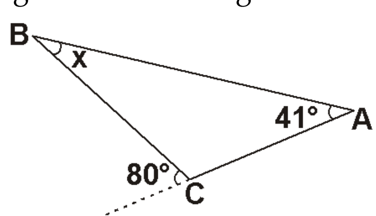
3) El valor del ángulo x

A) 6°
B) 8°
C) 10°
D) 20°
E) 62°



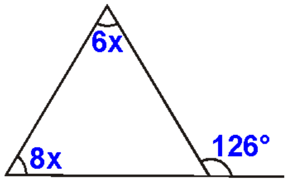
4) Hallar el valor de x en el triángulo ABC de la figura.

A) 39°
B) 52°
C) 61º
D) 121º
E) 102º



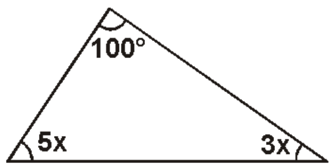
5) En el siguiente triángulo encuentra el valor de “x”:

A) 6º
B) 9º
C) 10º
D) 7º
E) 14º



6) Halla el valor de x

A) 5º
B) 10º
C) 12º
D) 20º
E) 14º



Evaluación:

- Se utilizará el instrumento de evaluación 3

Actividad 4

- **Aprendizaje Esperado:** Resuelve problemas usando los criterios de congruencia y semejanza relacionados con objetos de su entorno
- **Atributo (s):** 1.1 Enfrenta las dificultades que se le presentan y es consciente de sus valores, fortalezas y debilidades / 4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.
- **Conocimiento (s):** Semejanza y congruencia

Lectura previa

Lee con mucha atención el siguiente texto:

CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS

Con frecuencia, en la realidad se presentan procesos de producción de piezas que deben ser idénticas, es decir mismo tamaño e igual forma para que puedan ser empleadas para el fin que se diseñaron.
En geometría las figuras que tienen la misma forma e igual tamaño se le llama congruentes.

Así, por ejemplo, si los triángulos ABC y A'B'C' los sobreponemos y coinciden sus tres lados y sus tres ángulos, decimos que son congruentes. por lo tanto:

$$\Delta ABC = \Delta A'B'C'$$

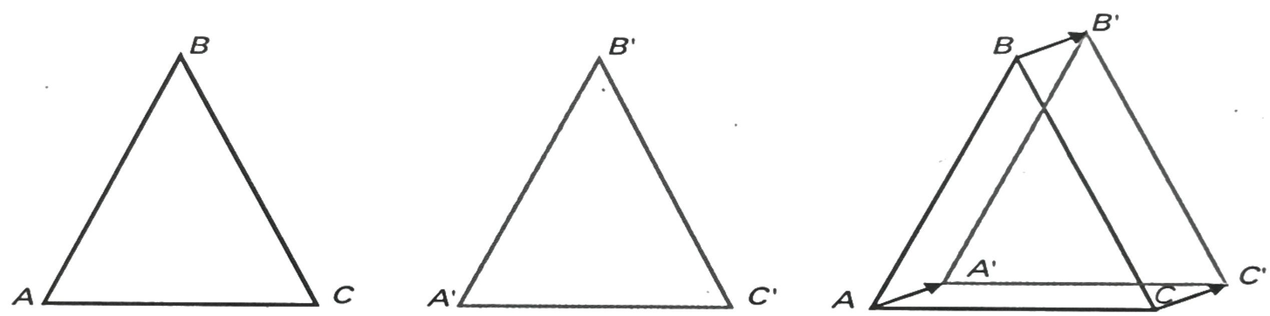
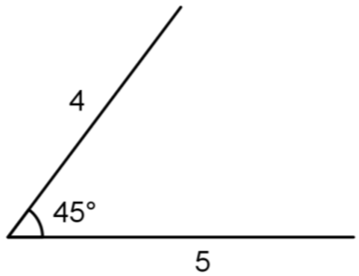
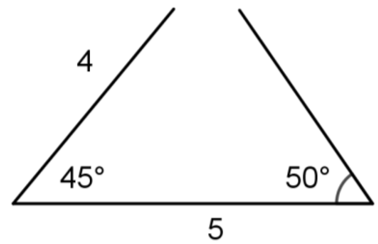
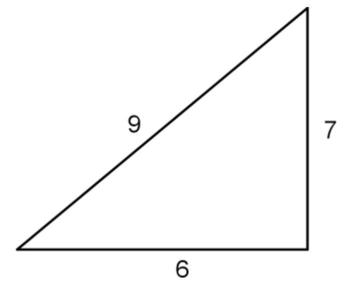


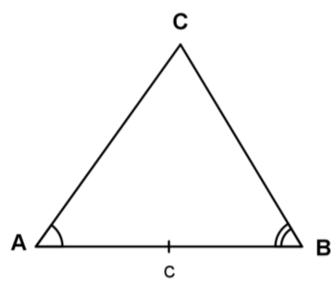
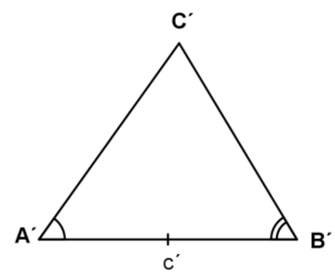
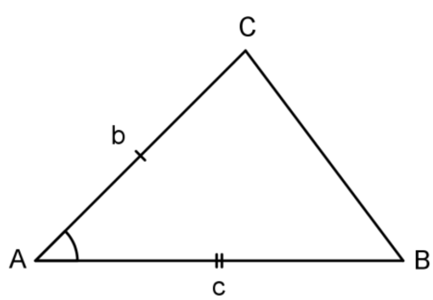
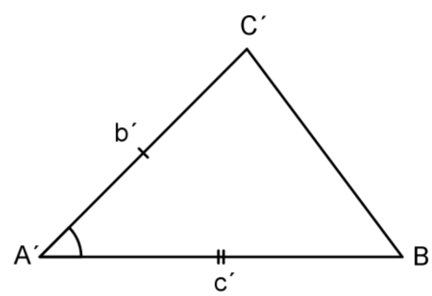
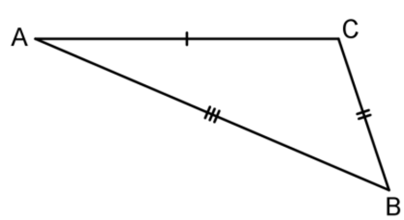
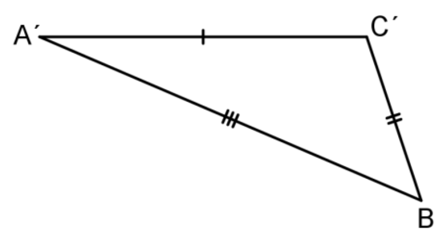
Figura tomada de Jiménez, R. (2007). *Geometría y Trigonometria.* Estado de México: Pearson

El **símbolo de congruencia** es (≅).

Sin embargo, para construir un triángulo es necesario conocer únicamente tres partes de este. Se encuentra que el tamaño y la forma quedan definidos totalmente dada la siguiente información.

 Dos lados y el ángulo comprendido	 Dos ángulos y el lado comprendido	 Los tres lados

Criterios de congruencia

Postulado	Figura 1	Figura 2
Dos ángulos y el lado comprendido entre éstos $A = A’$ $B = B’$ $c = c’$		
Dos lados y el ángulo comprendido entre éstos $A = A’$ $b = b’$ $c = c’$		
Los tres lados iguales $a = a’$ $b = b’$ $c = c’$		

Actividad 4.1

Instrucciones

I. Desde tu perspectiva, cuáles triángulos son congruentes en la serie que aparece abajo. Copia y resuelve en tu libreta

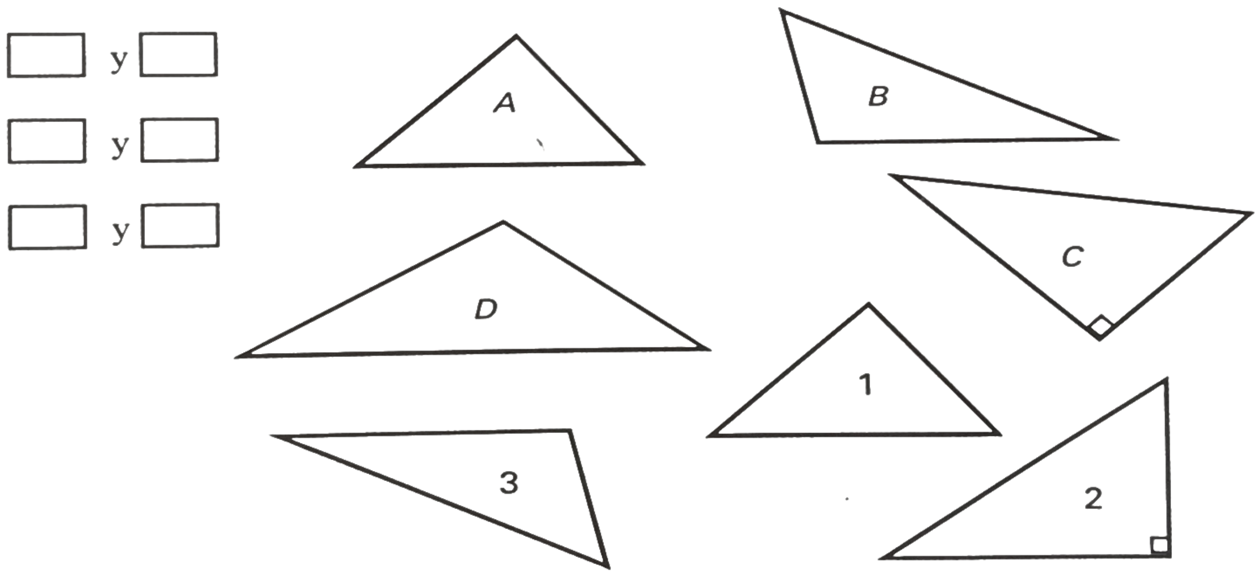


Figura tomada de Jiménez, R. (2007). *Geometría y Trigonometria.* Estado de México: Pearson

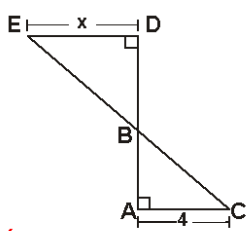
Actividad 4.2

Instrucciones:

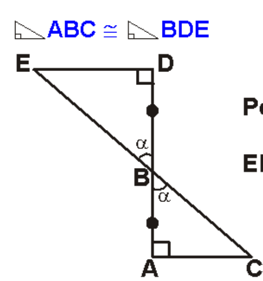
I. Copia y resuelve en tu libreta cada uno de los ejercicios según sea el caso y anota el criterio de congruencia utilizado. Selecciona la respuesta correcta (subraya)

Ejemplo:
1.- En la figura calcular el valor "x" si AB = BD
Criterio de congruencia A-L-A

A) 6
B) 8
C) 4
D) 10
E) 12



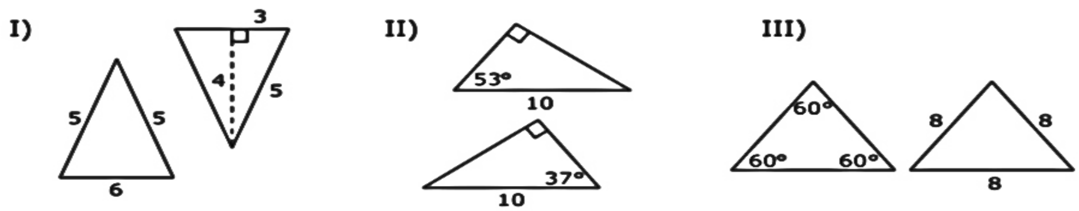
Solución



Por consiguiente:

ED = AC = 4
⇒x =4

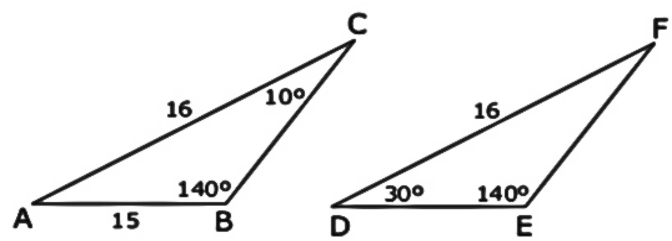
2.- Se muestra una pareja de triángulos congruentes en:
Criterio de congruencia ______________________________



A) Sólo I
B) Sólo II
C) Sólo III
D) Sólo I y II
E) I, II, y III

3- Según la información de la siguiente figura, ¿Cuál (es) de las proposiciones es (son) verdadera (s)
Criterio de congruencia ______________________________

II) $\measuredangle ACB \cong \measuredangle DFE$
III) AB=EF
IV) $\triangle BCA \cong \triangle EFD$



A) Sólo I
B) Sólo II
C) Sólo III
D) Sólo I y III
E) Sólo II, y III

4.- ¿En qué triangulo al trazar cualquier bisectriz se forman dos triángulos congruentes?
A) Rectángulo isósceles
B) Isósceles acutángulo
C) Rectángulo Escaleno
D) Equilátero
E) En ninguno

Evaluación
- Se utilizará el instrumento de evaluación 4

Actividad 5

- **Aprendizaje Esperado:** Resuelve problemas usando los criterios de congruencia y semejanza relacionados con objetos de su entorno
- **Atributo (s):** 1.1 Enfrenta las dificultades que se le presentan y es consciente de sus valores, fortalezas y debilidades / 4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.
- **Conocimiento (s):** Semejanza y congruencia

Lectura previa

Lee con atención el siguiente texto:

SEMEJANZA

El concepto de semejanza corresponde a figuras de igual forma, pero no necesariamente de igual tamaño.

Dos triángulos son semejantes cuando tienen sus respectivos ángulos iguales y sus lados respectivamente proporcionales

Símbolo de semejanza. $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ se lee los triángulos ΔABC y ΔPQR son semejantes

Para comprender el tema de semejanza de triángulos es importante analizar los conceptos de razón y proporción las cuales están directamente ligados a ella.

Razón. Es el cociente de dividir dos valores expresadas en las mismas unidades

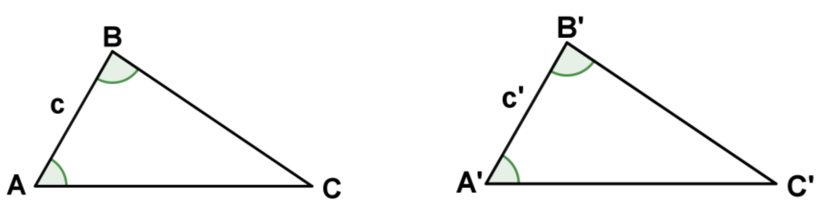
Por ejemplo.
Si un rectángulo tiene 6 m de ancho y 9 m de largo, la razón de la anchura a la longitud es $\frac{6}{9}$ y se lee 6 es a 9. Esto significa que, por cada 6 metros de ancho, el rectángulo tiene 9 metros de largo.

Proporción. Es la igualdad de dos razones.
Ejemplo: $\frac{3}{5} = \frac{9}{5}$

1.- Criterio ángulo-lado-ángulo (AA). Dos triángulos son semejantes si tienen dos ángulos iguales.

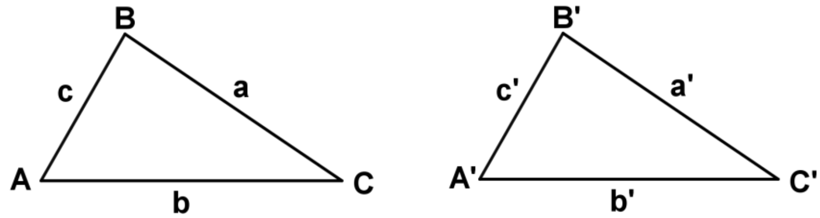
$\boldsymbol{A = A'}$

$\boldsymbol{B = B'}$



2.- Criterio lado-lado-lado (LLL). Dos triángulos son semejantes si tienen los lados proporcionales.

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$



3. **Criterio lado-ángulo-lado (LAL).** Dos triángulos son semejantes si tienen dos lados proporcionales y el ángulo comprendido entre ellos es igual.

$$\boldsymbol{B = B'}$$

$$\boldsymbol{\frac{a}{a'} = \frac{c}{c'}}$$

Actividad 5.1

Instrucciones

I. Copia en tu libreta cada uno de los ejercicios y resuelve según lo que indique, utilizando los criterios de semejanza.

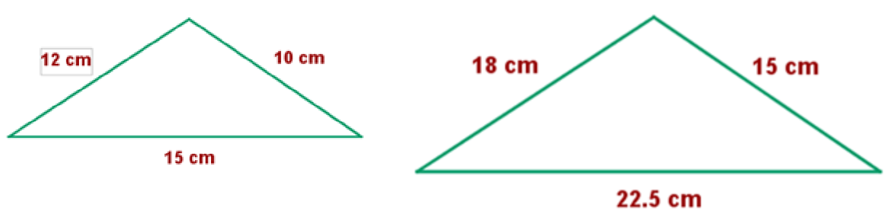
1. Razona si son semejantes los siguientes triángulos:

Ejemplo

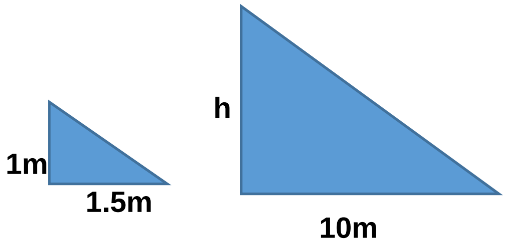
Solución:

$$\frac{12}{18} = \frac{10}{15} = \frac{15}{22.5}$$

$$0.667 = 0.667 = 0.667$$



2. Calcula el valor de la h de acuerdo los datos proporcionados



$$\frac{1}{1.5} = \frac{h}{10}$$

$$(1.5)h = 1(10)$$

$$1.5h = 10$$

$$h = \frac{10}{1.5} = 6.6\ m$$

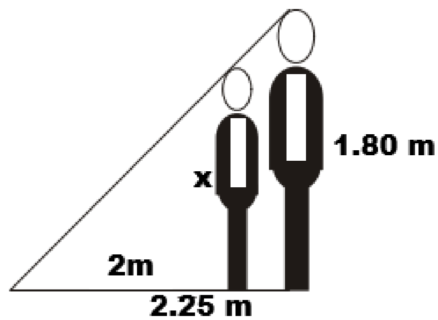
3. Calcula la altura de Juan sabiendo que proyecta una sombra de 2 metros en el momento en que Pedro, que mide 1.80 m proyecta una sombra de 2.25 m

Solución

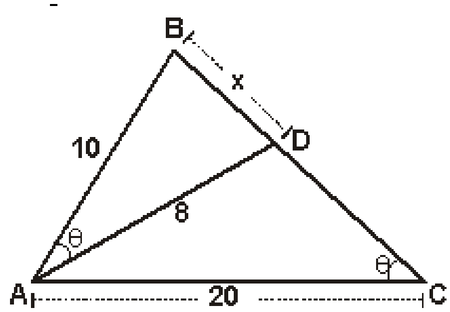
$$\frac{x}{2} = \frac{1.80}{2.25}$$

$$2.25x = 2(1.80)$$

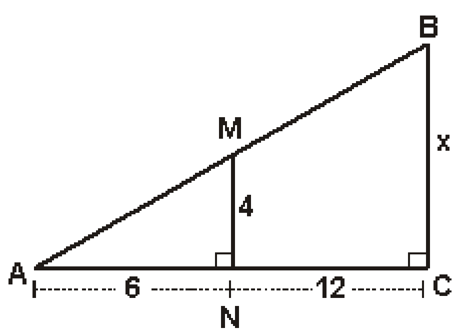
$$x = \frac{2(1.80)}{2.25} = 1.60\ m$$



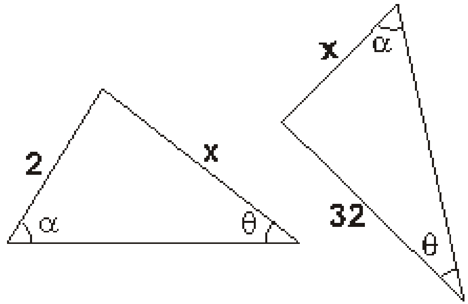
4. Dado la siguiente figura calcular el valor de "x"



5. Encuentra el valor de X de la siguiente figura.

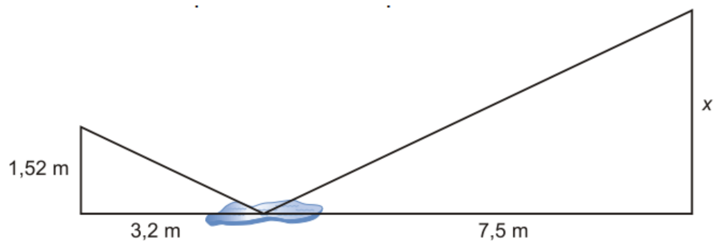


6. Halla el valor de X de la siguiente figura



7. Entre Sergio, de 152 cm de altura, y un árbol, hay un pequeño charco en el que se refleja su copa. Calcula la altura de dicho árbol sabiendo que las distancias que separan a Sergio del lugar de reflejo en el charco y del árbol son de 3.2 m y 10.7 m, respectivamente

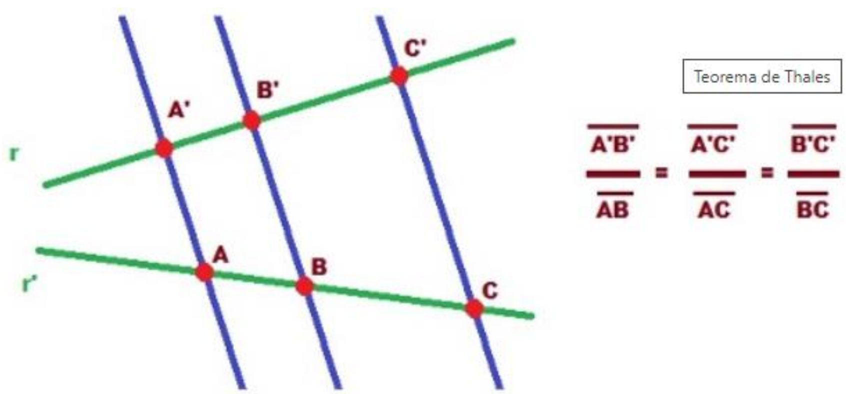
Hacemos una representación del problema llamando x a la altura del árbol:



8. Una torre mide 100 m de altura. En un determinado momento del día, una vara vertical de 40 cm arroja una sombra de 60 cm. ¿Cuánto medirá la sombra proyectada en ese instante por la torre?

TEOREMA DE TALES

Si dos rectas cualesquiera son cortadas por rectas paralelas, los segmentos que determina en una de las rectas son proporcionales a los segmentos correspondientes de la otra



$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}}$$

Teorema de Thales. Imagen de Arturo Mandly en Flickr

Licencia Creative Commons by-nc-sa

Este teorema nos permite calcular, por tanto, la longitud de un segmento si conocemos su correspondiente en la otra recta y la proporción entre ambos.

Actividad 5.2

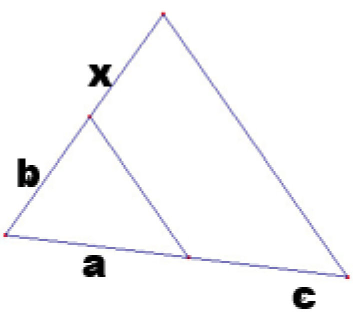
Instrucciones

I. Copia en tu libreta y resuelve los siguientes ejercicios, aplicando los conceptos del Teorema de Tales

Ejemplo:

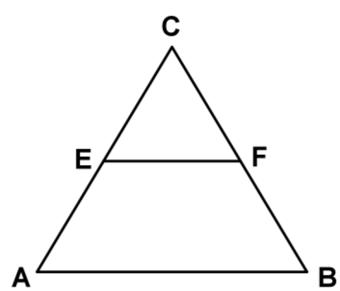
1.- Calcula x en el siguiente dibujo si a = 3 cm, b = 4 cm, c = 6 cm (x se denomina segmento cuarto proporcional).

Solución: $\frac{a}{b}=\frac{c}{x}\Rightarrow\frac{3}{4}=\frac{6}{x}\Rightarrow x=\frac{6\cdot 4}{3}=8\,\text{cm}$

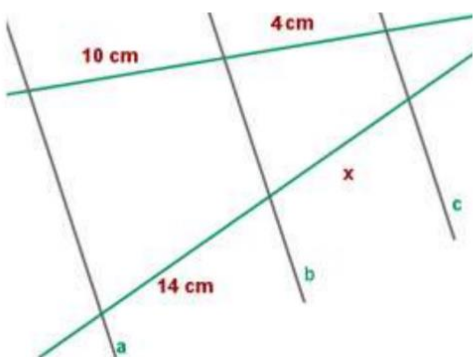


2.- Del siguiente dibujo conocemos: AC = 108 m, CE = 72 m, BF = 27 m. ¿Cuánto miden BC y CF?

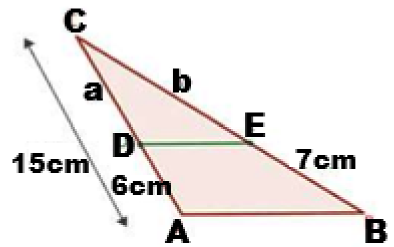
Solución: $\frac{108}{108-72}=\frac{BC}{27}\Rightarrow x=\frac{27\cdot 108}{36}=81\text{m}$ CF = 81 - 27 = 54 m



3.- Las rectas a, b y c son paralelas. Halla la longitud de x usando teorema de Thales.

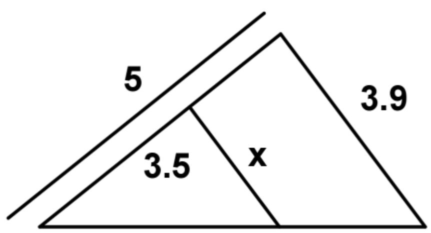


4.- Sabiendo que el segmento DE es paralelo a la base del triángulo, las medidas de los segmentos a y b ¿Cuáles son?

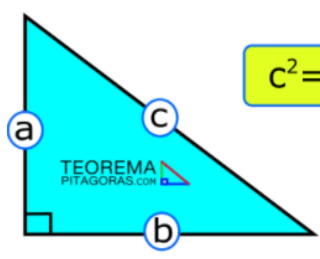


5.- Halla la altura de un árbol sabiendo que su sombra mide 12 m, y que en ese mismo instante la sombra de un palo de 1.5 m mide 4.5 m.

6.- Con el teorema de Tales encuentra el valor de la incógnita "x"



TEOREMA DE PITÁGORAS



$$c^2=a^2+b^2$$

Donde:

a y b son catetos

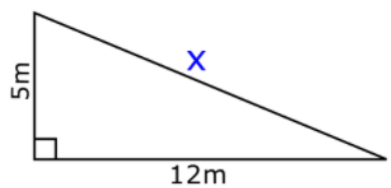
c es la hipotenusa

Actividad 5.3

Instrucciones:

I. Copia en tu libreta cada uno de los ejercicios y resuelve según los que se te solicite considerando el Teorema de Pitágoras.

Ejemplos 1.- Calcular la longitud de la hipotenusa de la siguiente figura.



Solución. Se conoce dos catetos del triángulo y se pide la hipotenusa. Aplicando el teorema de Pitágoras:

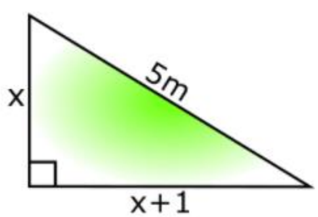
$\boldsymbol{c^2 = a^2 + b^2}$

$\boldsymbol{x^2 = 5^2 + 12^2}$

$\boldsymbol{x^2 = 25 + 144 = 169}$

$\boldsymbol{\sqrt{x^2} = \sqrt{169} = x = 13,}$ longitud de la hipotenusa

2.- Si la hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 5 m y los catetos son números consecutivos halle el perímetro del triángulo rectángulo.



Solución. Se conoce dos catetos del triángulo y se pide la hipotenusa. Aplicando el teorema de Pitágoras: $\boldsymbol{c^2 = a^2 + b^2}$

$\boldsymbol{x^2 + (x+1)^2 = 5^2 \therefore x^2 + x^2 + 2x + 1 = 25}$

$\boldsymbol{2x^2 + 2x + 1 - 25 = 0 \therefore 2x^2 + 2x - 24 = 0 \therefore x^2 + x - 12 = 0}$

Por factorización para hallar el valor de x

$\boldsymbol{(x+4)(x-3) = 0}$

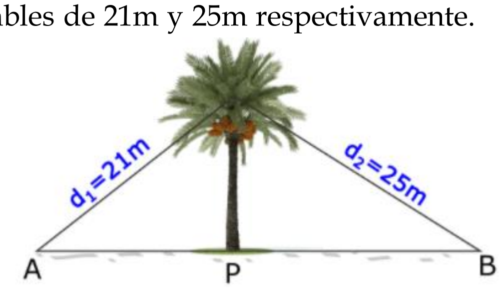
$\boldsymbol{x + 4 = 0}$ **y** $\boldsymbol{x - 3 = 0}$ **despejando**

$\boldsymbol{x = -4}$ **y** $\boldsymbol{x = 3}$

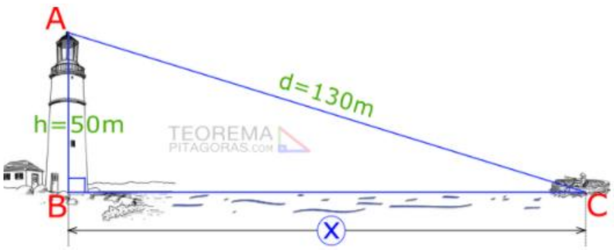
Se toma el 3 como el valor de x, por ser positivo se sustituye en los datos de cateto de la del triangulo $\boldsymbol{x = 3}$ **y** $\boldsymbol{x + 1 \therefore 3 + 1 = 4}$

Sumado los valores de cada cateto para obtener el perímetro es: 3m + 4m + 5m =12m

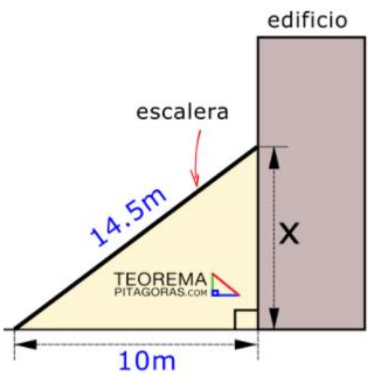
3.- Una palmera de 17 m, de altura se encuentra sujeta por dos cables de 21m y 25m respectivamente. En la figura se pide calcular la distancia AB



4.- Desde la parte más alta de un faro de 50 m de altura se observa un bote a una distancia de 130 m. Se pide hallar la distancia desde el pie del faro hasta el bote



5.- Una escalera de bomberos de 145 metros de longitud se apoya en la fachada de un edificio, poniendo el pie de la escalera a 10 metros del edificio. ¿Qué altura, en metros, alcanza la escalera?



Evaluación

- Se utilizará el instrumento de evaluación 5

VALORANDO MI AVANCE

Para concluir, contesta en tu libreta las siguientes preguntas con respecto de lo que aprendiste en este bloque:

- ¿Qué estoy aprendiendo?
- ¿En qué aprendizajes esperados aún tengo dificultades?
- ¿Qué acciones puedo realizar para mejorar mi desempeño?
- ¿Qué estrategias de estudio me han funcionado en este bloque?

BLOQUE II. Propiedades de los polígonos

Actividad 1

- **Aprendizaje Esperado:** Desarrolla estrategias, para la solución de problemas utilizando los elementos y propiedades de polígonos y poliedros que le permitan cuantificar el espacio en situaciones de su contexto.
- **Atributo (s):** 4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas. /..5.2 Ordena información de acuerdo a categorías, jerarquías y relaciones. / 5.3 Identifica los sistemas y reglas o principios medulares que subyacen a una serie de fenómenos.
- **Conocimiento (s):** Polígonos: Elementos y clasificación, ángulo central, ángulo interior, ángulo exterior, suma de ángulos interiores, exteriores, diagonales.

Lectura previa

Lee con mucha atención el siguiente texto:

INTRODUCCIÓN A LOS POLÍGONOS

El término **POLÍGONO** se forma por dos vocablos poli (varios o muchos) y gonia (ángulos) y lo definimos como la figura geométrica que está formada por tres o más lados, pudiendo estar los mismos dispuestos de manera regular o irregular.

Se clasifican de acuerdo a sus lados en:

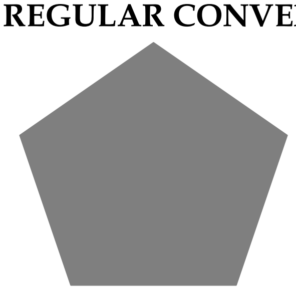
- ***Regulares:*** Todos sus lados y sus ángulos son iguales.
- ***Irregulares*:** No tiene todos sus lados y ángulos iguales.

De acuerdo a las medidas de sus ángulos se clasifican en:

- ***Cóncavos*:** Si al menos uno de sus ángulos mide más de 180°.
- ***Convexos*:** Si todos sus ángulos miden menos de 180°

Observa las siguientes figuras:

POLÍGONO REGULAR CONVEXO



POLÍGONO IRREGULAR CÓNCAVO

L	Nombre
3	Triángulo
4	Cuadrilátero
5	Pentágono
6	Hexágono
7	Heptágono
8	Octágono
9	Eneágono
10	Decágono
11	Undecágono
12	Dodecágono
13	Tridecágono

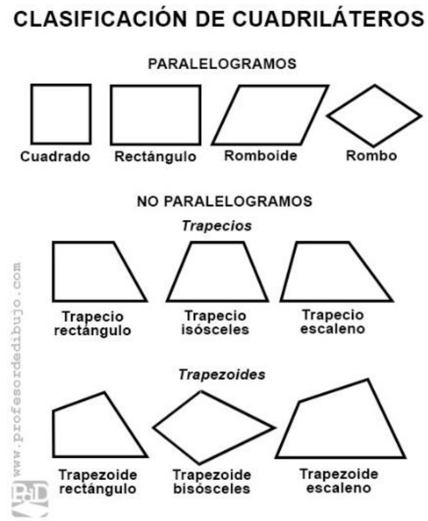


Figura tomada de internet https://www.profesordedibujo.com/geometria-plana/cuadrilateros/teoria-y-clasificacion-de-cuadrilateros/

Los siguientes prefijos serán: tetra, penta, hexa, hepta, octa, nona y el de 20 lados se llama icoságono.

ELEMENTOS DE LOS POLÍGONOS

En la siguiente figura observas un polígono regular con sus elementos, los cuales vamos a definir.

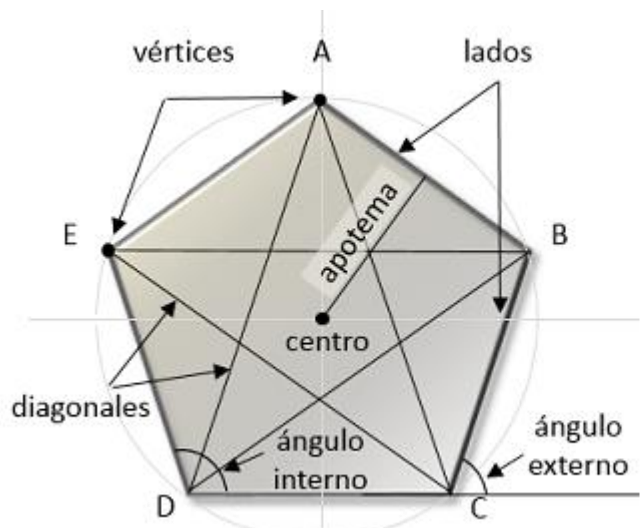


Figura tomada de internet https://www.matematicas10.net/2015/11/ejemplos-de-poligonos.html

LADOS: Segmentos de recta que se unen dos a dos y que delimitan el polígono.
VÉRTICES: Son los puntos donde se unen los lados.
DIAGONAL: Segmento de recta que une dos vértices no consecutivos.
CENTRO: Es el centro de una circunferencia circunscrita o que toca los vértices del polígono.

ÁNGULO INTERIOR: Formado por 2 lados en el interior del polígono.
ÁNGULO EXTERIOR: Formado por la prolongación de un lado y el contiguo a él por el exterior del polígono.
RADIO: Segmento que va del centro a cualquier vértice del polígono.
ÁNGULO CENTRAL: Formado por dos radios consecutivos.
APOTEMA: Segmento que va desde el centro y es perpendicular a un lado.

Actividad 1.1

Instrucciones

Ahora que ya conoces los elementos de los polígonos terminarás con el llenado de la siguiente tabla continuando con la secuencia que observes para que finalmente se obtengan algunas fórmulas que nos permitan hacer cálculos para polígonos con muchos lados.

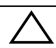
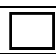
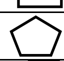
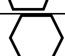
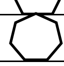
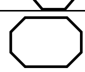
NOMBRE	FIGURA	# L	d	D	#△	ΣANG.	ANG. INT.
n-ágono		n	$n-3$	$\frac{n(n-3)}{2}$	$n-2$	$180°(n-2)$	$\frac{\Sigma\text{ANG.}}{n}$
Triángulo		3	0	0	1	180°	60°
Cuadrilátero		4	1	2			
Pentágono		5	2			540°	108°
Hexágono		6		5			
Heptágono		7			5		128.571
Octágono		8	5				

Tabla tomada y adaptada de: Matemáticas 2, Joaquín Ruiz Basto, Grupo Editorial Patria

DESCRIPCIÓN DE LAS COLUMNAS:

\# L es el número de lados del polígono.
d representa las diagonales que se pueden trazar desde un solo vértice.
D son las diagonales que se trazan en total desde todos los vértices sin repetir.
\# △ son los triángulos que se forman al trazar las diagonales de un vértice.
ΣANG. es la suma de todos los ángulos interiores, miden lo mismo.
ANG. INT. Es la medida de cada ángulo interior del polígono.
En un polígono regular, tanto la suma de los ángulos centrales como los exteriores es igual a 360° y la medida de cada ángulo central o exterior se obtiene dividiendo los 360° entre el número de lados.

Ejemplo 1

Calculamos cada uno de los elementos mencionados en la tabla para un polígono regular de 25 lados.

$$d = 25 - 3 = 22$$

$$D = \frac{(25)(22)}{2} = \frac{550}{2} = 275$$

$$\measuredangle i = \frac{180°(25-2)}{25} = \frac{4140}{25} = 165.6°$$

Actividad 1.2

Instrucciones

Con las fórmulas obtenidas calcula el número de diagonales en total que se pueden trazar en un icoságono, así como la medida de cada ángulo interior.

Evaluación

- La evaluación de esta actividad se llevará a cabo con el instrumento de evaluación 6 Lista de cotejo.

Actividad 2

- **Aprendizaje Esperado:** Desarrolla estrategias, para la solución de problemas utilizando los elementos y propiedades de polígonos y poliedros que le permitan cuantificar el espacio en situaciones de su contexto.
- **Atributo (s):** 4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas. /5.3 Identifica los sistemas y reglas o principios medulares que subyacen a una serie de fenómenos.
- **Conocimiento (s):** Fórmulas para el cálculo de perímetros y áreas y solución de problemas.

Lectura previa

Lee con mucha atención el siguiente texto:

En nuestro diario vivir muchas veces nos encontramos con la necesidad de conocer las medidas de muchas cosas para poder determinar su valor o para calcular algo que necesitemos. Por ejemplo: para cercar un terreno debemos conocer las medidas de sus lados para saber cuánta malla comprar, para hacer un piso el albañil necesita conocer la superficie a cubrir para que calcule la cantidad de polvo, grava y cemento que se necesita. Es útil entonces conocer lo que es el perímetro y el área de cada espacio, la forma que tiene y cómo calcular.

Perímetro

Es la longitud del contorno de un polígono, lo que delimita al polígono, se obtiene fácilmente sumando las medidas de sus lados.

Área

Es la superficie plana limitada por el contorno de un polígono, la cantidad de cuadros de la unidad de medida por lado que entran en esa superficie. Su medida solamente se puede obtener haciendo cálculos que dependen de la forma del polígono.

A continuación, se te presentan las tablas con las diferentes áreas de los triángulos, cuadriláteros y polígonos regulares, con ellas podrás resolver los problemas que se te plantearán.

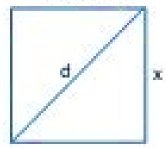
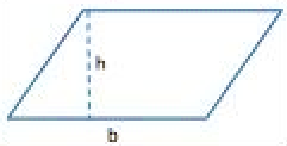
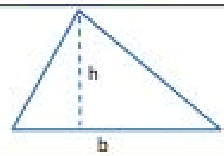
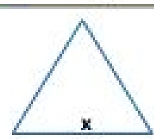
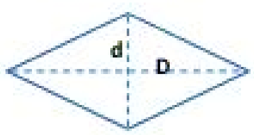
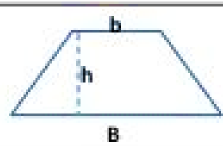
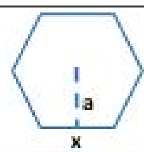
CUADRO DE FÓRMULAS DE ÁREA Y PERÍMETRO DE FIGURAS PLANAS				
NOMBRE	FIGURA	ELEMENTOS	AREA	PERIMETRO
CUADRADO		x = lado d = diagonal	$A = x^2$ $A = \frac{d^2}{2}$	$P = 4x$
RECTANGULO		b= base h = altura	$A = b.h$	$P = 2b + 2h$
PARALELOGRAMO		b= base h = altura	$A = b.h$	P = suma de lados
TRIANGULO		b= base h = altura	$A = \frac{b.h}{2}$	P = suma de lados
TRIÁNGULO EQUILÁTERO		x = lado	$A = \frac{x^2\sqrt{3}}{4}$	$P = 3x$
ROMBO		D = diagonal mayor d = diagonal menor	$A = \frac{D.d}{2}$	P = suma de lados
TRAPECIO		B = base mayor b = base menor h = altura	$A = \left(\frac{B+b}{2}\right)h$	P = suma de lados
POLÍGONO REGULAR		a = apotema x = lado n = N° lados p = perímetro	$A = \frac{P.a}{2}$	$P = n.x$

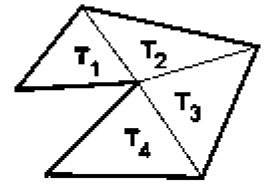
Figura tomada de internet https://es.slideshare.net/jorgeherreracuitiva32/cuadro-de-formulas-de-area-y-permetro

Una de las desventajas de la conocida fórmula para calcular el área de un triángulo es que necesariamente tenemos que conocer la medida de uno de sus lados y la altura (que es la medida del segmento trazado desde un vértice y que es perpendicular al lado opuesto o a su prolongación), pero si tenemos un triángulo del cual conocemos la medida de sus 3 lados entonces podemos utilizar la **Fórmula de Herón** para calcular su área, la cual es la siguiente:

$$A = \sqrt{SP(SP - L1)(SP - L2)(SP - L3)}$$

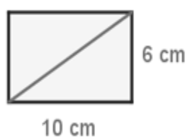
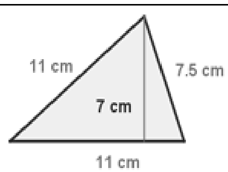
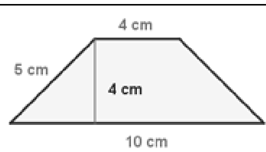
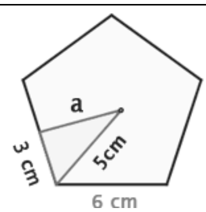
Siendo SP el semi perímetro (la mitad del perímetro) y L1, L2, L3 las medidas de cada uno de sus lados.

De ahí obtenemos que para calcular el área de cualquier polígono irregular procedemos a triangularlo trazando sus diagonales y calculamos el área de cada triángulo por separado para después sumarlas.



Ejemplo 1

A. Cálculo de áreas de figuras sencillas

FIGURA	PROCEDIMIENTO	RESULTADO
	$A = (5\ cm)^2$	$A = 25\ cm^2$
	$A = (10\ cm)(6\ cm)$	$A = 60\ cm^2$
	$A = \dfrac{(11\ cm)(7\ cm)}{2}$ $A = \sqrt{14.75(3.75)(3.75)(7.25)}$	$A = 38.5\ cm^2$ $A = 38.7789\ cm^2$
	$A = \dfrac{(10\ cm + 4\ cm)4\ cm}{2}$	$A = 28\ cm^2$
	$a = \sqrt{(3\ cm)^2 + (4\ cm)^2}$ $A = \dfrac{(30\ cm)(5\ cm)}{2}$	$a = 5\ cm$ $A = 75\ cm^2$

Ejemplo 2

B. Problemas

1. En un rombo, cada lado mide 10 *cm* de longitud y una de sus diagonales mide 12 *cm*. Calcula el área del rombo.

Solución: Al trazar ambas diagonales el rombo se divide en 4 partes iguales siendo cada una de ellas un triángulo con ángulo recto e hipotenusa de 10 cm y un cateto de 6 cm puesto que las diagonales se intersecan en el punto medio. Entonces el otro cateto es:

$$d = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8\ cm$$

Es medida de la mitad de la otra diagonal, por lo tanto, la diagonal completa mide 16 cm. El área del rombo es:

$$A = \frac{(16\ cm)(12cm)}{2} = 96\ cm^2$$

2. ¿Cuál es el ancho de un rectángulo que mide 16 cm. de largo si su área es equivalente al de un cuadrado de 12 cm. de lado?

Solución: Calculamos el área del cuadrado:

$$A_C = (12\ cm)^2 = 144\ cm^2$$

Ahora ya podemos calcular el ancho o altura del rectángulo:

$$A_R = 144\ cm^2 = (16\ cm)(ancho)$$

$$ancho = \frac{144\ cm^2}{16\ cm} = 9\ cm$$

3. ¿En cuánto aumenta el área de un rectángulo de lados 12 m. y 4 m. sí se aumentan ambos lados en un 25%?

Solución: El área del rectángulo original es de 48 m^2, al aumentar las medidas, los lados quedan de 15 m y 5 m siendo el área de 75 m^2. El aumento es de 27 m^2 y el porcentaje de 56.25%

Ejemplo 3

C. Aplicaciones

1. ¿Cuántos árboles pueden plantarse en un terreno de 30 m por 15 m si cada árbol necesita 4 m^2, siendo que cada árbol necesita un espacio de 2.5 m por 2.5 m?

Solución: Cada árbol necesita un espacio de $(2.5\ m)^2 = 6.25\ m^2$, el área total del terreno es de:$A = (30\ m\ )(15\ m) = 450\ m^2$.
Entonces dividimos la superficie total entre el espacio que necesita cada árbol: $\#\ árboles = \frac{450\ m^2}{6.25\ m^2}$ = 72 árboles

2. José desea cubrir el piso de su habitación de 6 m de largo por 5 m de ancho con vitropiso cuadrado de 33 cm por 33 cm e investiga que cada caja trae 14 piezas y tiene un costo de $185. Calcula la cantidad de cajas que debe comprar y la cantidad de dinero que necesita.

Solución: Se debe cubrir una superficie de 30 m^2,
cada pieza cubre (0.33 m) (0.33 m) =0.1089 m^2,

entonces José necesita: 30 m^2/0.1089 m^2 = 275.48 piezas, lo que equivale a 275.48/14 =19.67 o sea, 20 cajas y $3,700.

Actividad 2

Instrucciones

Ahora pondrás en práctica lo aprendido en esta lección.

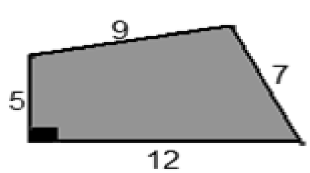
1. Realiza la siguiente actividad de campo, tomando nota y elaborando apuntes de los pasos que vayas desarrollando en la misma.

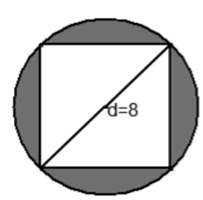
Utilizando cintas, flexómetros, cordeles, hilos o lo que tengas a mano para medir longitudes vas a elegir 3 espacios para medirle las dimensiones y calcular los perímetros y áreas. Puede ser: perímetro y área del terreno de tu casa, de una puerta, ventana, o la cantidad de vitropiso que se necesita para cubrir el piso de algún espacio de la casa que no cuente con él, también puede ser cuántos árboles frutales podrían sembrarse en un terreno cercano, los animales que pueden encerrarse en un corral o la reseña con datos de alguna actividad que se realice en la casa o con algún familiar o vecino.
Lo que vas a entregar es un reporte de todo lo que hiciste y los cálculos que realizaste con los respectivos resultados.

2. Resuelve los siguientes problemas:

a) El área de un cuadrado es 64 cm^2. ¿Cuál es el perímetro del triángulo equilátero construido sobre su diagonal?
b) En un rectángulo, el largo excede en 8 cm. al ancho. Si el perímetro mide 72 cm. ¿Cuál es su área?
c) Un papel cuadrado de lado 12 cm. se dobla de modo que los cuatro vértices queden en el punto de intersección de las diagonales. ¿Cuál es el área de la nueva figura que resulta?
d) El perímetro de un cuadrado de lado 2 m es igual al de un rectángulo cuya base es el triple de su altura. ¿Cuál es el área del rectángulo?

3. Calcula el área sombreada de las siguientes figuras:





Evaluación

- La evaluación de esta actividad se llevará a cabo con el instrumento de evaluación 7. Rúbrica.

Actividad 3

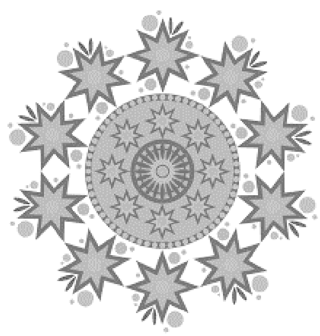
- **Aprendizaje Esperado:** Examina las figuras geométricas en diferentes expresiones artísticas.
- **Atributo (s):** 2.1. Valora el arte como manifestación de la belleza y expresión de ideas, sensaciones y emociones.
- **Conocimiento (s):** Polígonos.

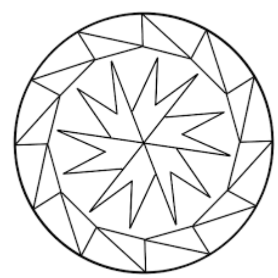
Lectura previa

Lee con mucha atención el siguiente texto:

EXPRESIONES ARTÍSTICAS CON POLÍGONOS

Al trazar las diagonales de los polígonos podemos notar que se forman diferentes estrellas que dan una belleza singular a las figuras. Al colorearlas con diferentes colores aumenta la belleza, y a partir de ellos se pueden crear *MANDALAS,* que son una tradición de la cultura oriental a través de las cuales se intenta configurar de forma iconográfica y simbólica la esencia de la vida y del pensamiento humano. Algunos ejemplos son:





Actividad 3

Instrucciones

Vas a crear una expresión artística, ya sea pintura, dibujo, póster, escultura, etc. utilizando la mayor cantidad de polígonos (triángulos, pentágonos, hexágonos, heptágonos, etc.) así como cuadriláteros (cuadrado, rectángulo, rombo, trapecio, trapezoide, etc.) también puedes utilizar circunferencias, círculos, y poliedros (cubos, prismas) utilizando la regla y el compás. Hacer una reseña de lo que significa tu obra artística y las figuras que sobresalen en ella.

Evaluación

- La evaluación de esta actividad se llevará a cabo con el instrumento de evaluación 8. Lista de cotejo.

Actividad 4

- **Aprendizaje Esperado:** Desarrolla estrategias, para la solución de problemas utilizando los elementos y propiedades de polígonos y poliedros que le permitan cuantificar el espacio en situaciones de su contexto.
- **Atributo (s):** 4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas. /5.3 Identifica los sistemas y reglas o principios medulares que subyacen a una serie de fenómenos.
- **Conocimiento (s):** Poliedros: elementos y clasificación. Volúmenes

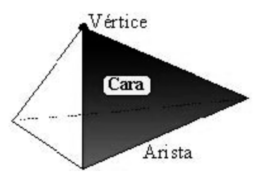
Lectura previa

RECONOCIENDO LOS POLIEDROS

Etimológicamente la palabra *poliedro* proviene del griego *poly:* muchos y *diedro:* plano o caras, o sea, muchos planos. Un poliedro es un cuerpo geométrico sólido que tiene volumen, 3 dimensiones en el espacio. De forma general se reconocen como sólidos cuyas caras pueden ser cualquier polígono. Para calcular el volumen de un poliedro tenemos que identificar su forma y utilizar fórmulas específicas para cada uno.

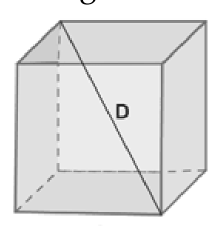
Los poliedros que se pueden apoyar en todas sus caras son convexos.

Elementos
Se reconocen tres elementos principales:
Cara: Son las figuras que limitan al poliedro.
Arista: Es la línea donde se unen dos caras.
Vértice: Es el punto donde concurren 3 o más aristas.



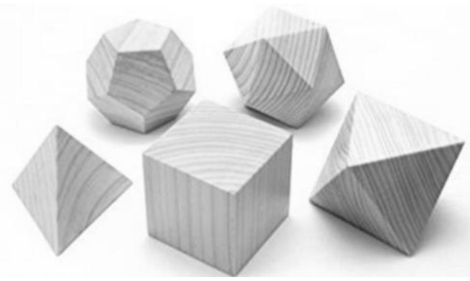
Fue el gran matemático Euler quien encontró la relación entre caras, aristas y vértices que se cumple para todo poliedro, la cual es la siguiente: $C + V = A + 2$

Por ejemplo: Un cubo tiene 6 caras, 8 vértices y 12 aristas. Entonces: 6 + 8 = 12 + 2
La diagonal de un poliedro se traza desde un vértice a otro sin que esté sobre alguna cara.



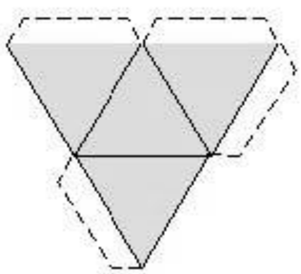
POLIEDRO REGULAR

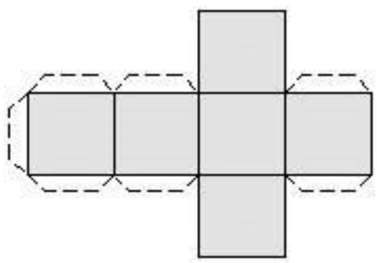
Es el que tiene todas sus caras regulares e iguales, son los llamados *sólidos platónicos* en honor al gran matemático y filósofo Platón.

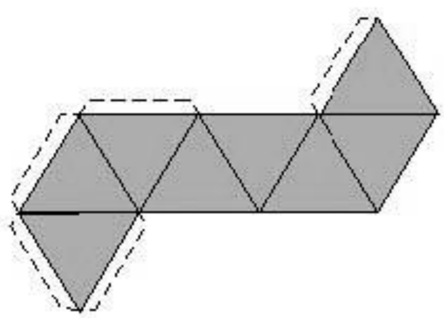


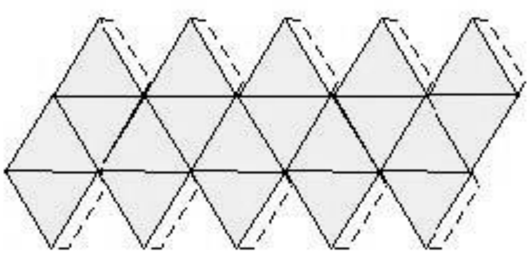
Son los siguientes:
Tetraedro: 4 triángulos equiláteros como caras.
Cubo o exaedro: 6 caras cuadradas.
Octaedro: 8 triángulos equiláteros como caras.
Dodecaedro: 12 pentágonos son sus caras.
Icosaedro: 20 triángulos rectángulos como caras.

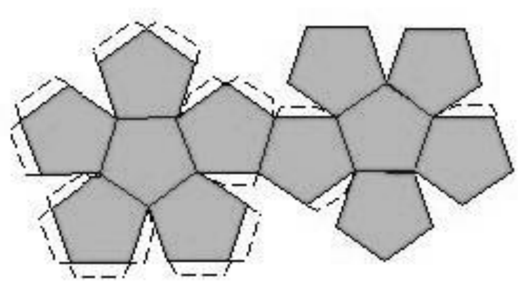
Construir estos poliedros no es complicado ya que existen las plantillas para hacerlo y uno mismo las puede replicar con las medidas que guste.



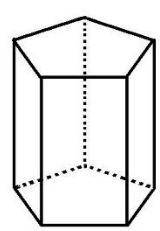


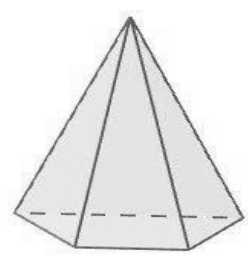






PRISMAS Y PIRÁMIDES





Un prisma es un poliedro limitado por dos caras iguales y paralelas (bases) y tantos paralelogramos (caras laterales) como lados tienen las bases.
Una pirámide tiene un polígono como base y tantas caras como lados tiene el polígono las cuales se juntan en un vértice llamado cúspide.

TABLA DE VOLÚMENES DE POLIEDROS

Las fórmulas más comunes para el cálculo de volúmenes son las siguientes:

CILINDRO $V = Ab \cdot h$	PRISMA $V = Ab \cdot h$
CONO $V = \frac{Ab \cdot h}{3}$	PIRÁMIDE $V = \frac{Ab \cdot h}{3}$
ESFERA $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$	CUBO $V = a^3$

Tabla tomada de internet https://matesblog.wordpress.com/2020/03/30/volumen-de-cuerpos-geometricos/

Ejemplo 1

1. Se pintará una alberca con forma de prisma rectangular de 7 m de ancho, 9 m de largo y 2.5 m de profundidad. ¿Cuántos litros de pintura son necesarios si cada litro cubre una superficie de 1.9 m^2?

Solución: El fondo de la alberca tiene un área de 63 m^2, hay 2 paredes de (7 m) (2.5 m)=17.5m^2 son 35 m^2, otras 2 paredes de (9 m) (2.5 m)=22.5 m^2 son 45 m^2, haciendo un total de 143 m^2. Por lo tanto, se requieren 143 m^2/1.9 m^2=75.26 litros de pintura.

2. Calcula la altura de un prisma cuyo volumen es de 110 cm^3 y el área de la base de 8 cm^2.

Solución: $110 = (8)h$

$$h = \frac{110}{8} = 13.75\ cm^2$$

3. Calcula la cantidad de agua que contiene una pecera de 40 cm de largo 30 cm de ancho y el agua alcanza una altura de 35 cm.

Solución: V= (40 cm) (30 cm) (35 cm) = 42,000 cm^3 = 42 litros

Actividad 4

Instrucciones

Elabora un cuestionario de 10 preguntas con sus respuestas en donde incluyas un problema de cálculo de volúmenes de algún sólido.

Evaluación

- La evaluación de esta actividad se llevará a cabo con el instrumento de evaluación 9. Lista de cotejo.

VALORANDO MI AVANCE

Para concluir, contesta en tu libreta las siguientes preguntas con respecto de lo que aprendiste en este bloque:

- ¿Qué estoy aprendiendo?
- ¿En qué aprendizajes esperados aún tengo dificultades?
- ¿Qué acciones puedo realizar para mejorar mi desempeño?
- ¿Qué estrategias de estudio me han funcionado en este bloque?

BLOQUE III. Elementos de la circunferencia

Actividad 1

- **Aprendizaje Esperado:** Resuelve problemas de su entorno usando la circunferencia y círculo y las diferentes figuras asociadas con estas.
- **Atributo(s):** 1.1 Enfrenta las dificultades que se le presentan y es consciente de sus valores, fortalezas y debilidades / 4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.
- **Conocimiento (s):** Circunferencia y círculo / Concepto de círculo y circunferencia /Segmentos y rectas de la circunferencia

Lectura previa

Lee con mucha atención el siguiente texto:

¿Recuerdas cuál es la diferencia entre un círculo y una circunferencia? En la figura 1 observarás cómo podemos distinguirlas.

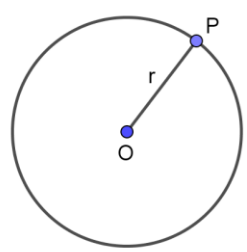
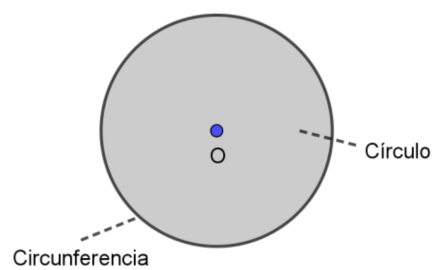
FIGURA 1 LA CIRCUNFERENCIA Y EL CÍRCULO	
Circunferencia Es una línea curva, cerrada y plana cuyos puntos están a la misma distancia del centro.	**Círculo** Es una figura plana formada por una circunferencia y su interior. Está a la misma distancia del resto de puntos de la circunferencia.
	

Figura tomada de internet https://terefernandezvazquez.blogspot.com/2019/05/circulo-y-circunferencia-figuras.html

En la circunferencia se definen algunos elementos: puntos, segmentos y rectas (figura 2)

Figura 2

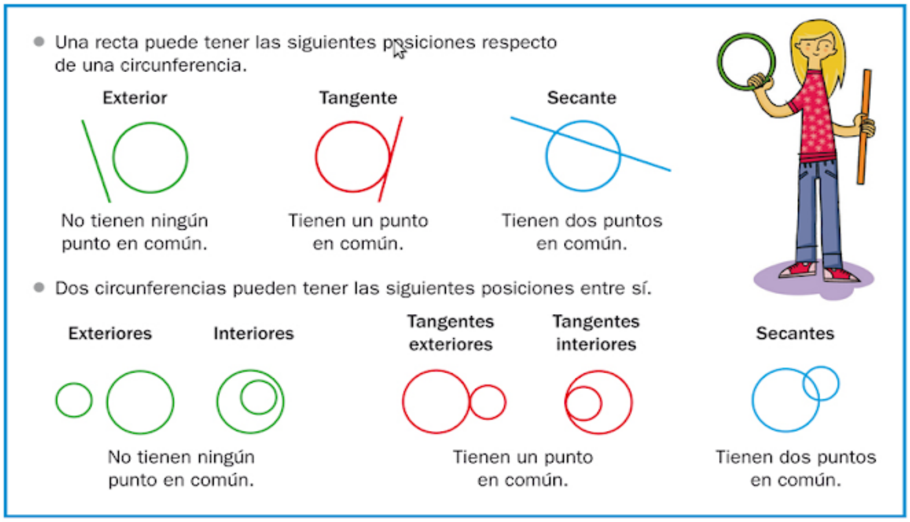
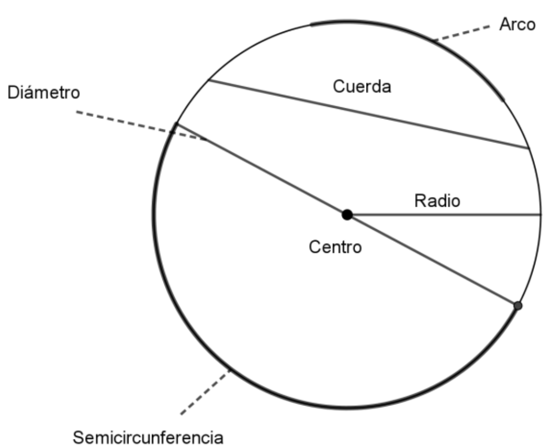


Figura tomada de internet Tomi.digital https://tomi.digital/es/54362/4s3pcircunferencia-unitaria-lo-que-necesitas-en-trigo



- **Centro**, el punto interior equidistante de todos los puntos de la circunferencia.
- **Radio**, el segmento que une el centro con un punto cualquiera de la circunferencia.
- **Diámetro**, el mayor segmento que une dos puntos de la circunferencia y que necesariamente pasa por el centro.
- **Cuerda**, el segmento que une dos puntos de la circunferencia; (las cuerdas de longitud máxima son los diámetros).
- **Arco**, el segmento curvilíneo de puntos pertenecientes a la circunferencia.
- **Semicircunferencia**, cada uno de los dos arcos delimitados por los extremos de un diámetro.

En el plano, una recta puede intersectar a una circunferencia en un punto, intersectarla en dos puntos o no intersectarla.

Las rectas que intersectan a la circunferencia en un solo punto se llaman **rectas tangentes** a la circunferencia. Al punto en el que la tangente intersecta a la circunferencia se llama **punto de tangencia**; una recta tangente a una circunferencia es perpendicular al radio que une el punto de tangencia con el centro, por lo cual, la distancia que hay del centro a la recta tangente es igual al radio.

Las rectas que intersectan en dos puntos a la circunferencia se llaman **rectas secantes**. La distancia del centro de la circunferencia a la recta secante es menor que el radio.

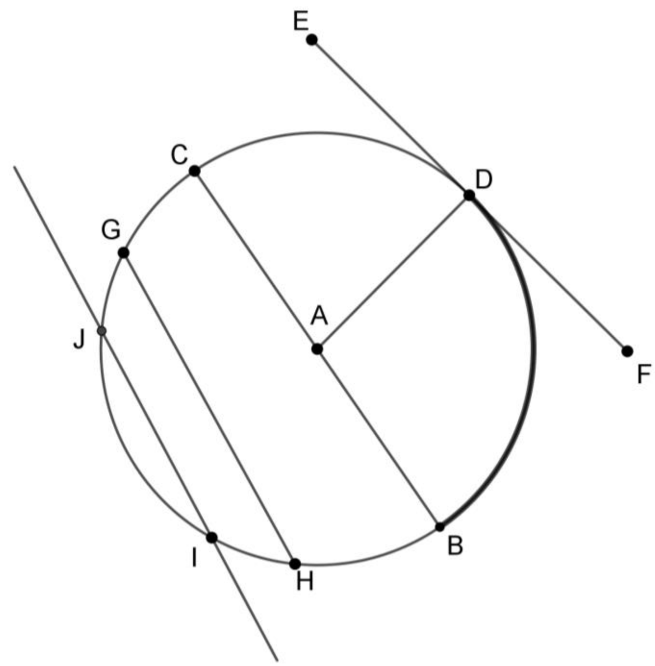
Las rectas que no intersectan a la circunferencia se llaman **rectas exteriores**. La distancia del centro de la circunferencia a la recta exterior es mayor que el radio.

Actividad 1

Instrucciones

1. Después de analizar y leer los textos anteriores, realiza el siguiente ejercicio

Basándote de la siguiente figura y consultando la información anterior, completa el recuadro con la definición y el punto o segmento referente a la circunferencia, guíate del ejemplo. Dibuja en tu libreta de apuntes la figura, así como el recuadro.



Elemento	Definición	Punto o Segmento
Centro	El punto interior equidistante de todos los puntos de la Circunferencia.	**Punto A**
Radio		
Diámetro		
Cuerda		
Recta Secante		
Recta Tangente		
Punto de tangencia		
Arco		

Evaluación

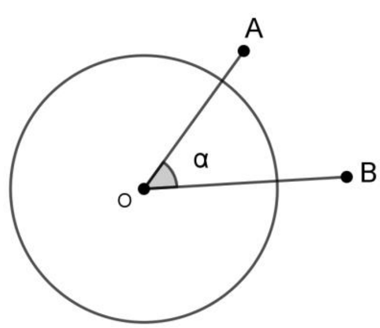
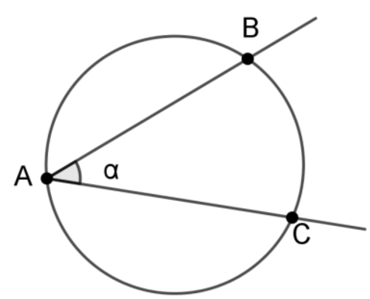
- Se evaluará con el instrumento de evaluación 10

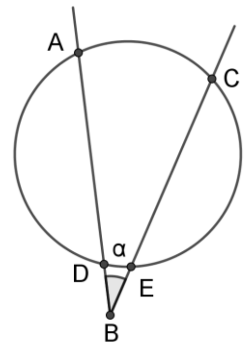
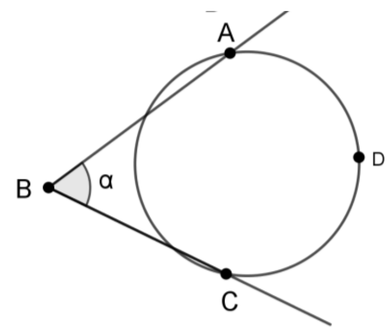
Actividad 2

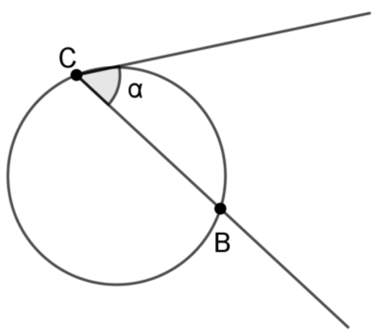
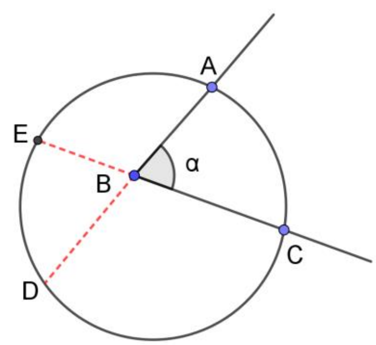
- **Aprendizaje Esperado:** Resuelve problemas de su entorno usando la circunferencia y círculo y las diferentes figuras asociadas con estas.
- **Atributo(s):** 1.1 Enfrenta las dificultades que se le presentan y es consciente de sus valores, fortalezas y debilidades / 4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.
- **Conocimiento (s):** Circunferencia y círculo / concepto de círculo y circunferencia /Segmentos y rectas de la circunferencia/Ángulos en la circunferencia.

Lectura previa

Ahora conozcamos acerca de los ángulos en la circunferencia, observa las figuras, la definición y la fórmula contenida en la siguiente tabla:

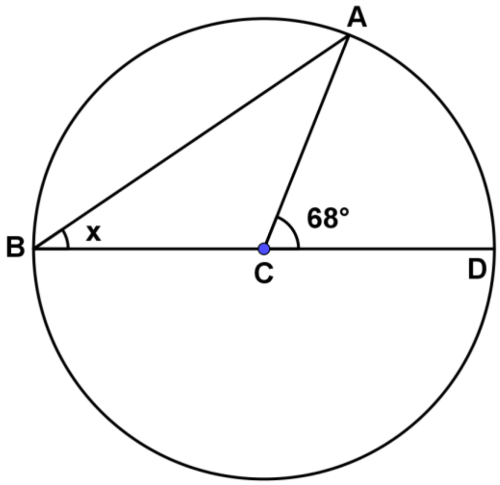
Ángulo central Fórmula $\angle\alpha = \overset{\frown}{AB}$  	**Ángulo inscrito** Fórmula $\angle\alpha = \frac{\overset{\frown}{BC}}{2}$ 
Su vértice es el centro de la circunferencia Sus lados son dos radios OA y OB Su medida es la misma que la del arco de circunferencia que cortan sus lados.	Su vértice es un punto de la circunferencia Sus lados son dos rectas secantes AB y AC Su medida es la mitad de la del arco de circunferencia que cortan sus lados

Ángulo exterior	**Ángulo circunscrito**
Fórmula $\angle\alpha = \frac{\widehat{AC}-\widehat{ED}}{2}$	Fórmula $\angle\alpha = \frac{\widehat{ADC}-\widehat{AC}}{2}$
	
Su vértice es un punto en el exterior de la circunferencia Sus lados son dos rectas secantes Su medida es la semidiferencia de los arcos de circunferencia que cortan sus lados	Su vértice es un punto en el exterior de la circunferencia Sus lados son dos rectas tangentes Su medida es la semidiferencia de los arcos de circunferencia que cortan sus lados

Ángulo semi inscrito	**Ángulo interior**
Fórmula $\angle\alpha = \frac{\widehat{BC}}{2}$	Fórmula $\angle\alpha = \frac{\widehat{AC}+\widehat{ED}}{2}$
	
Su vértice es un punto de la circunferencia Un lado es una recta secante y el otro es una recta tangente Su medida es la mitad de la del arco de circunferencia que cortan sus lados.	Su vértice es un punto en el interior de la circunferencia Sus lados son dos rectas secantes Su medida es la semisuma del arco de circunferencia que cortan sus lados y del que cortan las prolongaciones de sus lados.

Ejemplo 1

Calcula la medida del ángulo marcado con x.

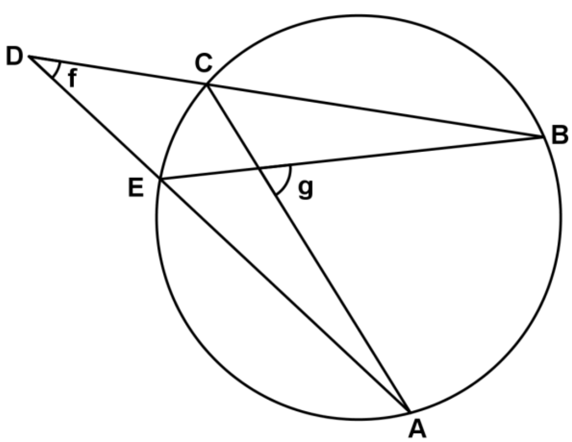


Solución: El ángulo central vale 68 grados
El ángulo inscrito vale la mitad del arco que comprende, por lo tanto:
$\propto ACD = arcoAD = 68°$
$\propto ABD = \frac{arcoAD}{2} = \frac{68}{2} = 34\ grados$
Por lo tanto.

$\propto x = 34\ grados$

Ejemplo 2

Calcula el valor de los Arcos AB Y CE si el ángulo f= 15 grados y el ángulo g= 88 grados.



Solución: Como el ángulo f es exterior , el ángulo g es interior y tenemos dos incógnitas, el arco AB y CE, planteamos un sistema de dos ecuaciones simultáneas.

Ecuacion 1 $< f = \frac{\hat{}AB - \hat{}\,CE}{2}$

Ecuacion 2 $< g = \frac{\hat{}AB + \hat{}\,CE}{2}$

$15 = \frac{\hat{}AB - \hat{}\,CE}{2}$ y $88 = \frac{\hat{}AB + \hat{}\,CE}{2}$
Resolviendo por reduccion.

$15\ (2) = \frac{\hat{}AB - \hat{}\,CE}{}$ y $88\ (2) = \frac{\hat{}AB + \hat{}\,CE}{}$

Por lo tanto $30 = \frac{\hat{}AB - \hat{}CE}{}$

$176 = \frac{\hat{}AB + \hat{}CE}{}$, por lo tanto, efectuando la suma nos quedaría.

$206 = 2\hat{}AB$ por lo tanto el arco AB= 103 grados.

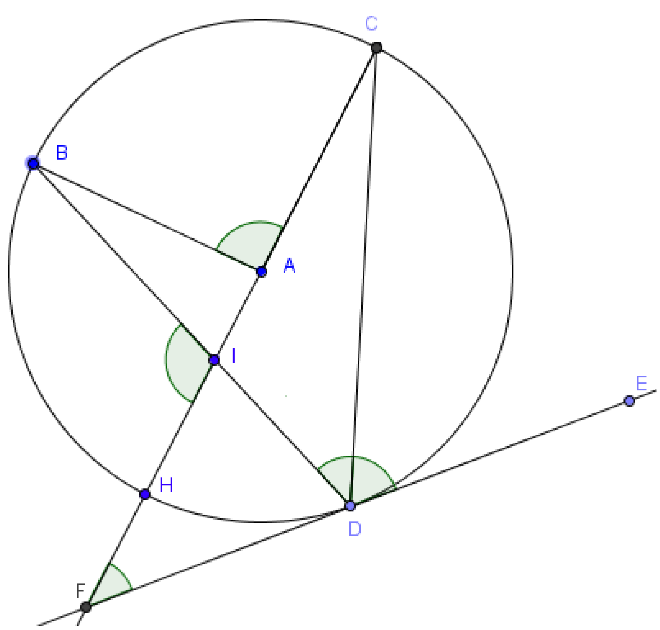
Sustituyendo el arco AB = 103 grados en la ecuacion 1, tenemos:

30= 103 –CE, por lo tanto, 30 – 103= -CE, por lo tanto, CE= 73 grados.

Actividad 2.1

Instrucciones

De acuerdo al texto leído y a las imágenes presentadas con anterioridad sobre el tema ángulos en la circunferencia llena el recuadro de abajo observando la siguiente figura que se te presenta, dibuja en tu libreta de apuntes la figura, así como el recuadro.



Nombre	Definición	Representación
Ángulo central,	Si tiene su vértice en el centro de ésta. Sus lados contienen a dos radios. La amplitud de un ángulo central es igual a la del arco que abarca.	
Ángulo Inscrito		$\angle CDE$
Ángulo Semi-inscrito		
Ángulo Interior		
Ángulo Exterior		
Ángulo Circunscrito		

Evaluación:

- Se evaluará con el instrumento de evaluación 11

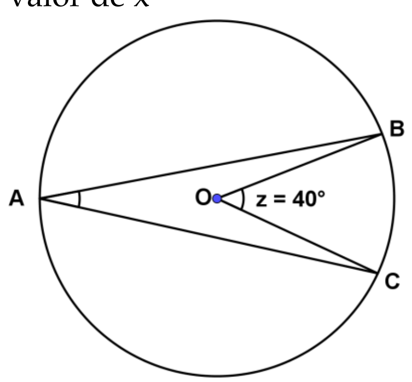
Actividad 2.2

Instrucciones

Copia en la libreta de apuntes los siguientes ejercicios y resuélvelos de forma correcta empleando la fórmula correspondiente de acuerdo a los ángulos en la circunferencia y seleccionando la opción de respuesta correcta.

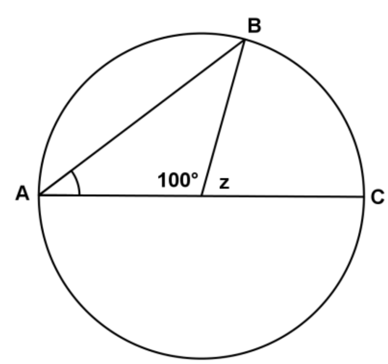
1. Halla el valor de x

a) 80°
b) 25°
c) 20°
d) 40°

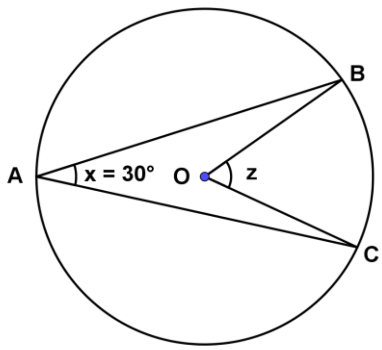


2. Halla el valor de x

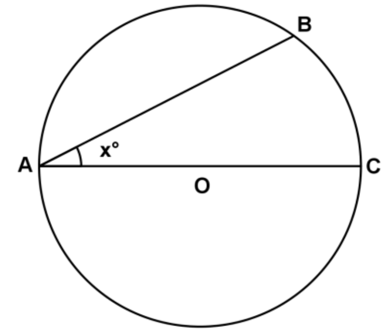
a) 80°
b) 160°
c) 40°
d) 60°



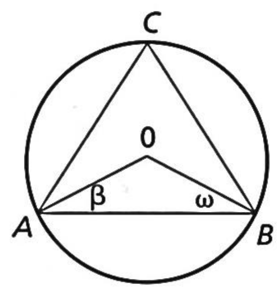
3. Halla el valor de z
a) 30°
b) 45°
c) 60°
d) 68°



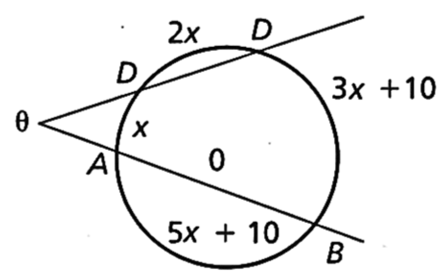
4. Halla el valor de x si $\widehat{AB} = 110°$ y $\overline{AC}$ es un diámetro
a) 30°
b) 35°
c) 70°
d) 45°



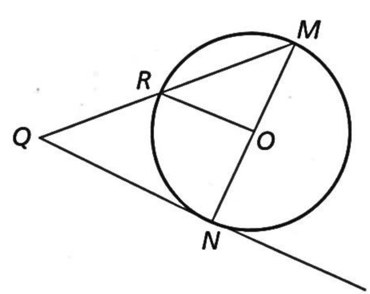
5. Cuál es el valor de $\beta\ y\ \omega$ si $\angle ACB$ vale 60°



6. Halla el valor de θ



7. Encuentra el valor de $\angle MQN$



$\angle MON = 180°$

$\angle RON = 90°$

Evaluación

- Se evaluará con el instrumento de evaluación 12

Actividad 3

- **Aprendizaje Esperado:** Propone diferentes estrategias de solución a problemas de áreas y perímetros para representar espacios y objetos de su entorno.
- **Atributo(s):** 1.1 Enfrenta las dificultades que se le presentan y es consciente de sus valores, fortalezas y debilidades / 4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.
- **Conocimiento(s):** Perímetro de la circunferencia/Área del círculo/Secciones de un círculo (corona, sector y trapecio circular) /Área de regiones sombreadas.

Lectura previa

Lee con mucha atención el siguiente texto:

La longitud de circunferencia es igual a dos veces el radio (r) por π, o lo que es lo mismo, el diámetro (D) de la circunferencia por π. El concepto "longitud de la circunferencia" es igual al del "perímetro del círculo" y miden lo mismo.

El área del círculo es igual al producto de π por el radio (r) al cuadrado. También se puede calcular el área conociendo el diámetro del círculo (D), ya que éste es el doble del radio.

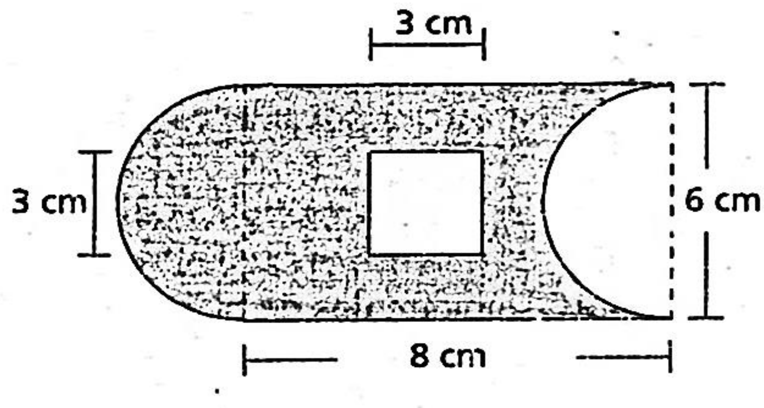
Fórmula para el cálculo el perímetro de una circunferencia.

$$P = 2\pi \times r$$

ÁREA POLIGONO REGULAR	ÁREA CÍRCULO
$A = \frac{Pa}{2}$ *donde;* $A = Área$ $P = Perímetro$ $a = Apotema$	$A = \pi r^2$ *donde;* $A = Área$ $\pi = 3.14159265358979323846....$ $r = Radio$

Ejemplo 1

Calcula el área sombreada de la siguiente figura.



Solución:

Calculamos el área del rectángulo

$A = bx\ h$, por lo tanto, $A = 8\ cm\ x\ 6\ cm$ **,** por lo tanto $A = 48\ cm^2$

Calculamos el área del semicírculo

$\boldsymbol{A} = \frac{\pi r^2}{\mathbf{2}}$**,** por lo tanto, $\boldsymbol{A} = \frac{\mathbf{3.1416}\ (3cm)^2}{\mathbf{2}}$ por lo tanto, $\boldsymbol{A} = \frac{28.27cm^2}{\mathbf{2}}$ por lo tanto, $\boldsymbol{A} = \mathbf{14.23}\ \boldsymbol{cm}^2$

Calculamos el área del cuadrado

$A = l\ x\ l\ o\ l^2$ por lo tanto $A = (3cm)^2$ por lo tanto $A = 9cm^2$

Calculamos el área total sombreada

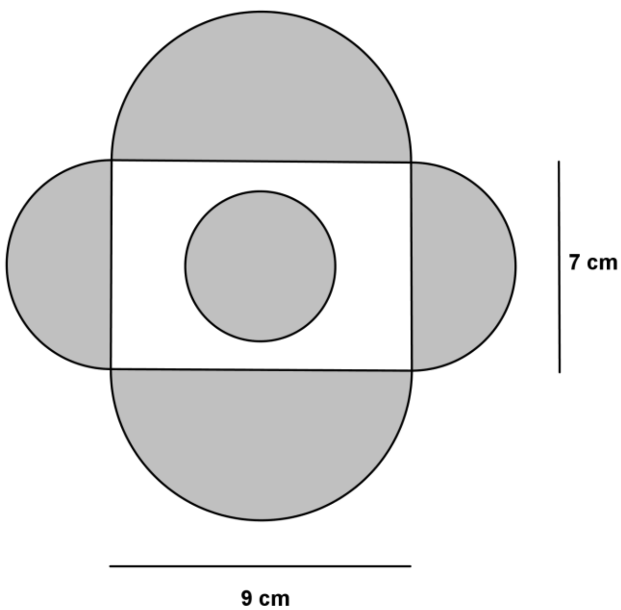
At = Área del rectángulo + Área del semicírculo –Área del cuadrado – Área del semicírculo.

At= 48 cm^2+ $\mathbf{14.23}\ \boldsymbol{cm}^2$ - 9cm^2- $\mathbf{14.23}\ \boldsymbol{cm}^2$

At= 39 cm^2

Ejemplo 2

Calcula el área sombreada de la siguiente figura



Solución:

Calculamos el área del círculo que está dentro del rectángulo

$A = \pi r^2$ por lo tanto $A = 3.1416(3.5cm)^2$, por lo tanto, $A = 3.1416(12.25cm^2\ )$

$A = 38.48cm^2$

Calculamos el área de los semicírculos de radio = 4.5 cm

$\boldsymbol{A} = \frac{\pi r^2}{\mathbf{2}}$**,** por lo tanto, $\boldsymbol{A} = \frac{\mathbf{3.1416}\ (4.5cm)^2}{\mathbf{2}}$ por lo tanto, $\boldsymbol{A} = \frac{63.61cm^2}{\mathbf{2}}$ por lo tanto, $\boldsymbol{A} =$ $\mathbf{31.80}\ \boldsymbol{cm}^2$

Calculamos el área de los semicírculos de radio = 3.5 cm

$\boldsymbol{A} = \frac{\pi r^2}{\mathbf{2}}$**,** por lo tanto, $\boldsymbol{A} = \frac{\mathbf{3.1416}\ (3.5cm)^2}{\mathbf{2}}$ por lo tanto, $\boldsymbol{A} = \frac{38.48cm^2}{\mathbf{2}}$ por lo tanto, $\boldsymbol{A} = \mathbf{19.24}\ \boldsymbol{cm}^2$

Calculamos área total sombreada.

At= $38.48cm^2$ + $(\mathbf{2})\mathbf{31.80}\ \boldsymbol{cm}^2$ **+** $(\mathbf{2})\mathbf{19.24}\ \boldsymbol{cm}^2$

At= $38.48cm^2$ + $\mathbf{63.61}\ \boldsymbol{cm}^2$ **+** $\mathbf{38.48}\ \boldsymbol{cm}^2$

At= $140.57cm^2$

Actividad 3

Instrucciones

Ejercicio 1. Resuelve los siguientes problemas de aplicación sobre áreas y perímetros de la circunferencia en tu libreta de apuntes.

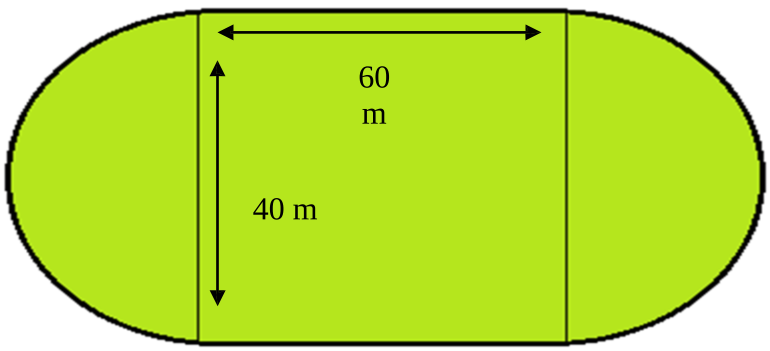
1. La llanta de un automóvil tiene un diámetro de 20 Pulgadas. ¿Cuántos metros recorrerá después de dar 250 vueltas?

2. ¿Cuántos metros de alambrada se requieren para proteger una fuente circular que tiene 14 metros de diámetro?

3. Halla la longitud de la mayor circunferencia que cabe en una hoja de papel de 22 cm de largo por 16 cm de ancho.

4. Se requieren cintas para sujetar tubos de 20 cm de radio. Si se desean empacar cuatro tubos. ¿Cuál es el mínimo de cinta que se requiere por amarre?

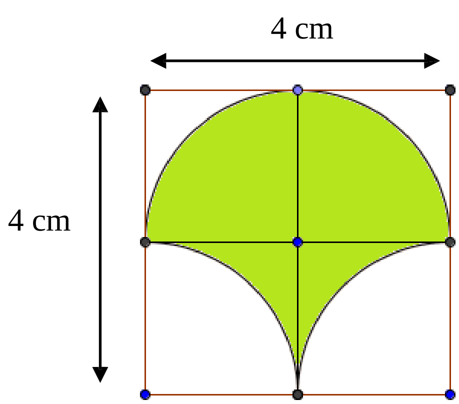
5. La pista de atletismo de un colegio tiene la forma de la figura. Halla la longitud del borde de la pista

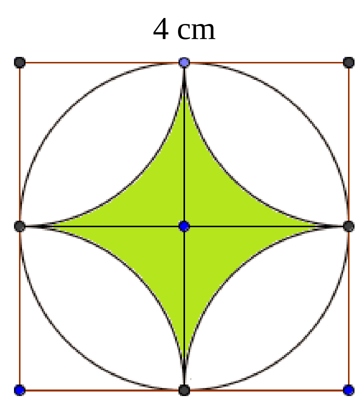


6.- Indaga cómo puede emplearse una escuadra de carpintero para encontrar el centro de una circunferencia y explique el procedimiento.

7. Si un pastel de forma circular se corta el diez pedazos congruentes, calcula el área de cada pedazo si el diámetro el pastel es de 40 cm.

Ejercicio 2. En tu libreta de apuntes, dibuja las figuras y calcula el área sombreada





Evaluación

- Se evaluará con el instrumento de evaluación 13

VALORANDO MI AVANCE

Para concluir, contesta en tu libreta las siguientes preguntas con respecto de lo que aprendiste en este bloque:

- ¿Qué estoy aprendiendo?
- ¿En qué aprendizajes esperados aún tengo dificultades?
- ¿Qué acciones puedo realizar para mejorar mi desempeño?
- ¿Qué estrategias de estudio me han funcionado en este bloque?

BLOQUE IV. Razones trigonométricas

Actividad 1

- **Aprendizaje Esperado:** Propone, de manera creativa, solución a problemas que involucran triángulos rectángulos, valorando su uso en la vida cotidiana / Elige razones trigonométricas para proponer alternativas en la solución de triángulos rectángulos en situaciones de su entorno.
- **Atributo (s):** 4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.
- **Conocimiento (s):** Razones trigonométricas de ángulos agudos / Solución de triángulos rectángulos

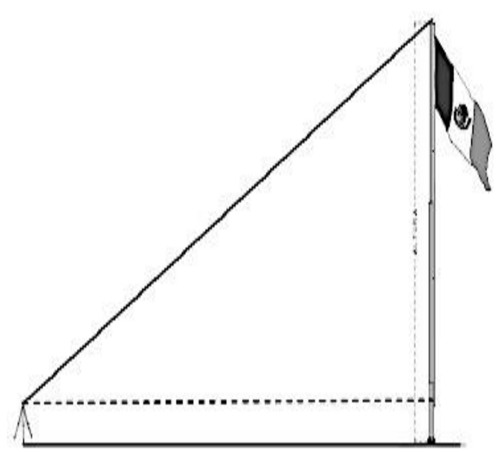
Lectura previa

I. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

Situación didáctica[1]:

Se va a llevar a cabo una ceremonia en la que van a izar la bandera de ecoschool en el Colegio.
El director necesita comprar el hilo para izar la bandera. Como dispone de escasos recursos económicos, quiere saber la altura exacta de la asta bandera para comprar el hilo necesario.
En el Colegio tampoco tienen una escalera tan alta para poder medir la asta directamente, sin embargo, cuenta con un teodolito para medir ángulos respecto a la horizontal.
La altura a la que el director coloca el teodolito es de 1.40 m respecto al piso y a 30 metros del pie de la astabandera. Al medir con el teodolito, obtiene una medida de 35º para el ángulo que se forma con la parte más alta de la asta.
¿Cuál es la altura de la asta bandera? ¿Cuánto de hilo necesita comprar el director si hay que considerar de ida y vuelta?

Observa la figura.

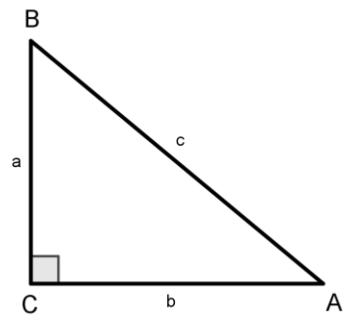


[1] COBAQROO, (GD-RIEMS-DOC-4208) Guía didáctica Matemáticas II, Chetumal, México, 2011, p. 85

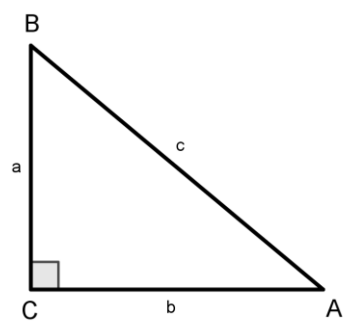
Una **razón trigonométrica** es la relación de los lados en un triángulo rectángulo y estas se establecen tomando como referencia los ángulos agudos.

Antes de formar las razones, debes de tener en cuenta las siguientes consideraciones:

1. Que estas razones comparan los lados en **triángulos rectángulos**, el cual tiene un ángulo recto (90º) y dos ángulos agudos (menores de 90º). En la siguiente figura**, C es el ángulo recto y A y B son los ángulos agudos.**

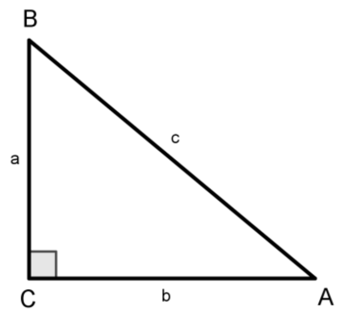


2. Que las razones se establecen tomando como referencia los ángulos agudos.
3. Que, en el triángulo rectángulo, al lado con mayor medida se le llama **hipotenusa**, y los **lados que forman el ángulo recto** se denominan **catetos.** En la figura anterior, **a y b son los catetos y c es la hipotenusa**.
4. Que los catetos se clasifican en **cateto opuesto y cateto adyacente**. El lado que funciona como cateto opuesto y/o cateto adyacente depende del ángulo agudo que se tome como referencia. Mira el ejemplo:



Si decides trabajar con el **ángulo agudo B**, el **cateto adyacente es el lado a** ya que está **próximo o unido al ángulo**, y el **cateto opuesto es el lado b**, ya que es el lado que **está en contraposición del ángulo agudo.** Ahora, si tomas como referencia **el ángulo agudo A**, el **cateto adyacente es b** y **el cateto opuesto es a**.

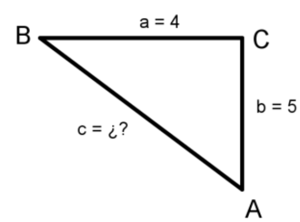
A continuación, se te presentan todas las razones trigonométricas para ángulos agudos que se pueden dar en un triángulo rectángulo. Las tres primeras reciben el nombre de razones directas y las tres últimas recíprocas.



Razones trigonométricas	Desde el ángulo A	Desde el ángulo B
$Sen = \frac{Cateto\ opuesto}{hipotenusa}$	$Sen\ A = \frac{a}{c}$	$Sen\ B = \frac{b}{c}$
$Cos = \frac{Cateto\ adyacente}{hipotenusa}$	$Cos\ A = \frac{b}{c}$	$Cos\ B = \frac{a}{c}$
$Tan = \frac{lado\ opuesto}{lado\ adyacente}$	$Tan\ A = \frac{a}{b}$	$Tan\ B = \frac{b}{a}$
$Cot = \frac{lado\ adyacente}{lado\ opuesto}$	$Cot\ A = \frac{b}{a}$	$Cot\ B = \frac{a}{b}$
$Sec = \frac{hipotenusa}{lado\ adyacente}$	$Sec\ A = \frac{c}{b}$	$Sec\ B = \frac{c}{a}$
$Csc = \frac{hipotenusa}{lado\ opuesto}$	$Csc\ A = \frac{c}{a}$	$Csc\ B = \frac{c}{b}$

Ejemplo 1

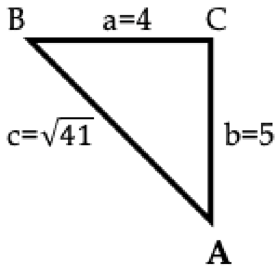
Calcula las razones trigonométricas del triángulo que se te presenta a continuación tomando como referencia el ángulo A.



En caso de que no conozcas un tercer lado, vas a tener que calcularlo aplicando el teorema de Pitágoras. En este ejemplo el lado que falta es la hipotenusa, así que aplicando $c^2 = a^2 + b^2$, te quedará:

$$c^2 = 4^2 + 5^2$$
$$c = \sqrt{16 + 25}$$
$$c = \sqrt{41}$$

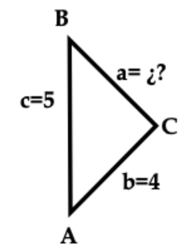
Ya que tienes los tres lados y trabajando desde el ángulo A, las razones trigonométricas te deben quedar de la siguiente manera. Al dividir cada razón queda el valor trigonométrico de cada una de ellas.



$Sen\ A = \frac{CO}{H} = \frac{4}{\sqrt{41}} = 0.6246$	$Cot\ A = \frac{CA}{CO} = \frac{5}{4} = 1.25$
$Cos\ A = \frac{CA}{H} = \frac{5}{\sqrt{41}} = 0.7808$	$Sec\ A = \frac{H}{CA} = \frac{\sqrt{41}}{5} = 1.2806$
$Tan\ A = \frac{CO}{CA} = \frac{4}{5} = 0.8$	$Csc\ A = \frac{H}{CO} = \frac{\sqrt{41}}{4} = 1.6007$

Ejemplo 2

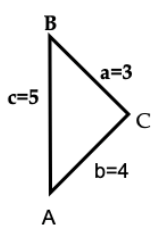
Calcula las razones trigonométricas tomando como referencia el ángulo B del siguiente triángulo.



Como primer paso, debes calcular el lado a con el teorema de Pitágoras, en este caso falta un cateto:

$$5^2 = 4^2 + a^2$$
$$5^2 - 4^2 = a^2$$
$$\sqrt{25 - 16} = a$$
$$\sqrt{9} = a$$
$$a = 3$$

Calculando las razones a partir del ángulo B te deben de quedar de la siguiente manera. Nuevamente, al dividir las razones, te quedan los valores trigonométricos de ellas.



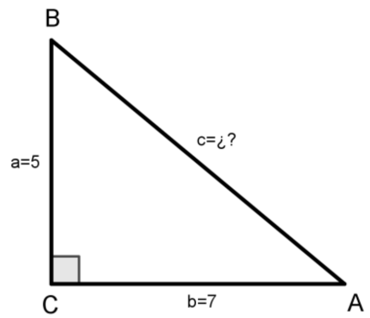
$Sen\ B = \frac{CO}{H} = \frac{4}{5} = 0.8$	$Cot\ B = \frac{CA}{CO} = \frac{3}{4} = 0.75$
$Cos\ B = \frac{CA}{H} = \frac{3}{5} = 0.6$	$Sec\ B = \frac{H}{CA} = \frac{5}{3} = 1.6666$
$Tan\ B = \frac{CO}{CA} = \frac{4}{3} = 1.3333$	$Csc\ B = \frac{H}{CO} = \frac{5}{4} = 1.25$

II. RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

Ya que sabes formar las razones trigonométricas, ahora sigue que resuelvas triángulos rectángulos, y eso significa que tienes que hallar el valor de los tres lados y los tres ángulos usando las razones trigonométricas y propiedades de los triángulos a partir de los datos que te dan. Observa los ejemplos de los cuatro casos que se te pueden presentar[2]:

2. Fuenlabrada, Geometría y trigonometría, McGraw Hill, México, 2004.

1. **Si conoces los dos catetos:** Si conoces los dos catetos, entonces **primero calculas** el lado c (hipotenusa) aplicando el teorema de Pitágoras.



$$c = \sqrt{5^2 + 7^2}$$
$$c = \sqrt{25 + 49}$$
$$c = \sqrt{74}$$

- **Ahora tienes que hallar el valor del ángulo A y del ángulo B, ya que el ángulo C por propiedad se sabe que es un ángulo recto (90º).**

  Para el ángulo que decidas hallar primero, A ó B, puedes escoger cualquiera de las tres razones trigonométricas directas (Seno, Coseno o Tangente), y eso se debe a que conoces los tres lados y como consecuencia, puedes formar cualquiera de las tres.

  Para este caso se hallará el ángulo A, observa:

Si decides con Seno:	Si decides con Coseno:	Si decides con Tangente:
$Sen\ A = \frac{5}{\sqrt{74}} = 0.5812$ $Sen^{-1}\ 0.5812 = 35.53^{º}$ $A = 35.53°\ ó\ 35°32'$	$Cos\ A = \frac{7}{\sqrt{74}} = 0.8137$ $Sen^{-1}\ 0.8137 = 35.54^{º}$ $A = 35.54°\ ó\ 35°32'$	$Tan\ A = \frac{5}{7} = 0.7142$ $Tan^{-1}\ 0.7142 = 35.53^{º}$ $A = 35.53°\ ó\ 35°32'$

  Como puedes ver, obtienes el valor del ángulo con cualquiera de las tres razones; si ves alguna pequeña diferencia, es por el corte a cuatro decimales que se hace.
  Ahora, tú no tienes que hacer todas las posibles opciones. Lo anterior es solo para ejemplificar.

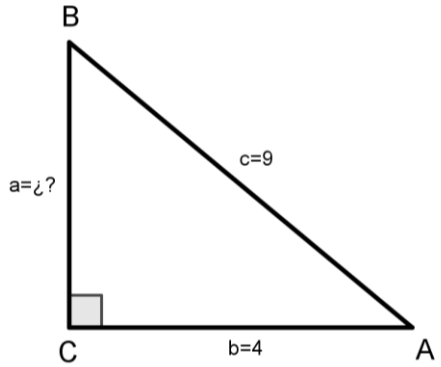
- **Para hallar el ángulo que te falta que es el B, puedes aplicar una razón trigonométrica, sin embargo, es más práctico que apliques la propiedad de los triángulos rectángulos que establece que la suma de los dos ángulos agudos da 90º. Así que:**

$$B = 90° - 35.53°$$

$$B = 54.47°$$

  Listo, ya se conocen los tres lados y los tres ángulos del triángulo rectángulo.

2. **Si conoces un cateto y la hipotenusa:** si conoces un cateto y la hipotenusa, **inicia** calculando el lado (cateto) que te falta con el teorema de Pitágoras.

	$a = \sqrt{9^2 - 4^2}$ $a = \sqrt{81 - 16}$ $a = \sqrt{65}$

- **Ahora te falta hallar el valor del ángulo A y del ángulo B. Recuerda, el ángulo C es un ángulo recto y mide 90º.**

  Ya sea que decidas hallar el ángulo A ó B, de nuevo puedes escoger Seno, Coseno o Tangente, porque conoces los tres lados. En este caso se hará con el ángulo B:

Si decides con Seno:	Si decides con Coseno:	Si decides con Tangente:
$Sen\ B = \frac{4}{9} = 0.4444$ $Sen^{-1}\ 0.4444 = 26.38^{º}$ $B = 26.38°$ ó $26°23'$	$Cos\ B = \frac{\sqrt{65}}{9} = 0.8958$ $Cos^{-1}\ 0.8958 = 26.38^{º}$ $B = 26.38°$ ó $26°23'$	$Tan\ B = \frac{4}{\sqrt{65}} = 0.4961$ $Tan^{-1}\ 0.4961 = 26.38^{º}$ $B = 26.38°$ ó $26°23'$

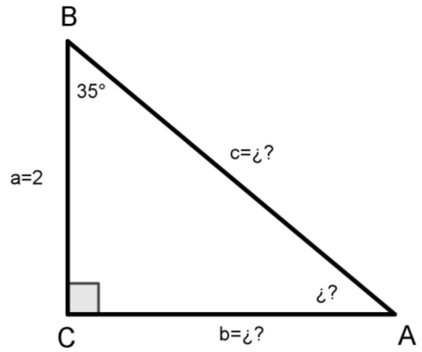
- **Ahora sólo te hace falta hallar el ángulo A usando la propiedad de la suma de los ángulos agudos.**

$$A = 90° - 26.38°$$

$$B = 63.62°$$

Listo, ya se conocen los tres lados y los tres ángulos del triángulo rectángulo.

3. **Si conoces un cateto y un ángulo agudo:** como conoces el valor de un ángulo agudo y sabes que la suma de dos ángulos agudos en un triángulo rectángulo te debe dar 90º, puedes **iniciar** calculando el ángulo A.

	$A = 90° - 35°$ $A = 55°$

- **Ahora puedes decidir qué lado hallar, el lado b o el lado c. De cualquier manera, también debes decidir con cuál de los dos ángulos agudos vas a trabajar, ángulo A ó B.**

  Si decides calcular el lado b tienes que compararlo con el valor del lado que conoces, que es a. Cuando se dice que tienes que comparar significa que hay que formar una razón trigonométrica. Para esto, deberás escoger el ángulo que vas a tomar como referencia y analizar que función tienen esos dos lados con respecto al ángulo, es decir, si es cateto opuesto, cateto adyacente o hipotenusa.

En este caso, si trabajas con respecto al ángulo A, el lado a es el cateto opuesto y b es el cateto adyacente. Por tanto, la razón directa que se debe formar es la tangente, ya que esta es la razón que compara el cateto opuesto entre el cateto adyacente. La situación queda de la siguiente manera:

$$Tan\ A = \frac{CO}{CA}$$

$$Tan\ 55° = \frac{2}{b}$$

$$b\ Tan\ 55° = 2$$

$$b = \frac{2}{Tan\ 55°}$$

$$b = 1.40$$

- **Y para terminar, como ya conoces dos lados calculas el que te falta con el teorema de Pitágoras:**

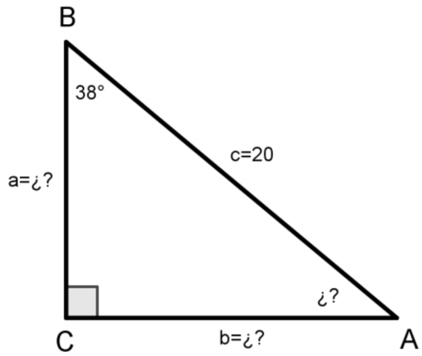
$$c = \sqrt{(2)^2 + (1.40)^2}$$

$$c = \sqrt{4 + 1.96}$$

$$c = \sqrt{5.96}$$

$$c = 2.44$$

4. **Si conoces la hipotenusa y un ángulo agudo:** como conoces el valor de un ángulo agudo y sabes que la suma de los dos ángulos agudos en un triángulo rectángulo te debe dar 90º, entonces **inicia** calculando el ángulo A.

	$A = 90° - 38°$ $A = 52°$

- **Ahora puedes decidir qué lado hallar, el lado a o el lado b. De cualquier manera, también debes decidir con cuál de los dos ángulos agudos vas a trabajar, ángulo A ó B.** Si decides calcular el lado a tienes que compararlo con el valor del lado que conoces, que es c, para formar la razón trigonométrica.

  Si trabajas con respecto al ángulo B, el lado a es el cateto adyacente y c es la hipotenusa. Por tanto, la razón directa que se debe formar es el coseno, ya que esta razón compara el cateto adyacente entre la hipotenusa. La situación queda de la siguiente manera:

$$Cos\ B = \frac{CA}{H}$$
$$Cos\ 38° = \frac{a}{20}$$
$$20\ Cos\ 38° = a$$
$$a = 15.76$$

- **Y para terminar, como ya conoces dos lados calculas el que te falta con el teorema de Pitágoras:**

$$b = \sqrt{(20)^2 - (15.76)^2}$$
$$b = \sqrt{400 - 248.37}$$
$$b = \sqrt{151.63}$$
$$b = 12.31$$

III. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Ahora vas a aplicar lo aprendido en la sección I y II en la resolución de problemas.

Para esta sección se retomará el ejercicio descrito al inicio de este bloque.

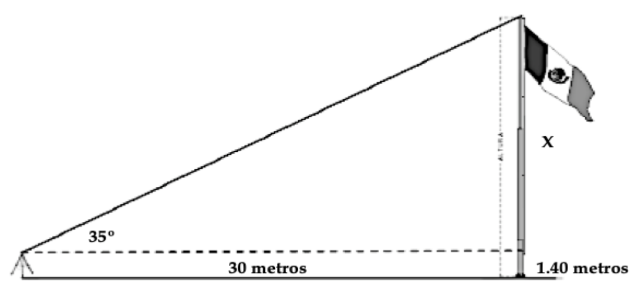
Se va a llevar a cabo una ceremonia en la que van a izar la bandera de ecoschool en el Colegio. El director necesita comprar el hilo para subir la bandera. Como dispone de escasos recursos económicos necesita saber la altura de la asta bandera para eficientar el dinero y comprar el hilo necesario.

En el Colegio tampoco tienen una escalera tan alta para poder medir la asta directamente, sin embargo, cuenta con un teodolito para medir ángulos respecto a la horizontal.
La altura a la que el director coloca el teodolito es de 1.40 m respecto al piso y a 30 metros del pie de la antena. Al medir con el teodolito, obtiene una medida de 35º para el ángulo que se forma con la parte más alta de la asta. ¿Cuál es la altura de la asta bandera? ¿Cuánto de hilo necesita comprar el director si hay que considerar de ida y vuelta?

Sugerencias para resolver los problemas:

1. Leer varias veces el problema hasta que comprendas bien el ejercicio.
2. Saca los datos del ejercicio y plásmalo en un auxiliar visual.
3. Analiza los datos que te dan y escoge la razón trigonométrica directa que se adecúa para responder a lo que te están preguntando en el problema.
4. Resolver problemas no equivale a que tengas que hallar todos los lados y ángulos del triángulo rectángulo que elabores; resolver problemas consiste en contestar a lo que te están preguntando.

En el problema de la asta bandera, los datos que se tienen son los siguientes:

Altura del teodolito: 1.40 m del piso **Medida del ángulo con el teodolito hasta la parte más alta de la asta bandera**: 35º **Distancia del teodolito al pie de la asta bandera:** 30 metros **Lo que se necesita saber para responder al problema:** x	Al trazar el auxiliar visual (recuerda que debe ser un triángulo rectángulo) los datos anteriores quedan de la siguiente manera 

Para resolver, tienes que observar los datos que te dan y qué representan en términos de los lados y ángulo que conoces. En este caso, x es cateto opuesto y 30 es cateto adyacente respecto al ángulo de 35º.

Ahora, sólo tienes que elegir la razón directa que compara el cateto opuesto y cateto adyacente. Para este caso es la tangente, quedando de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{Tan\ 35^\circ = \frac{x}{30}}$$

$$\mathbf{30\,Tan\,35° = x}$$

$$\mathbf{x = 21.00}$$

Lo que sigue es responder las preguntas. No siempre el resultado responde directamente al problema.

A la pregunta ¿cuánto mide la asta bandera? La respuesta es $21 + 1.40 = 22.40\ metros$. A los 21 hay que sumarle los 1.40, debido a que la x es la distancia desde la parte más alta del teodolito hasta la parte más alta de la asta bandera y no está considerando la altura del teodolito y por ende, ocupa una porción del asta bandera.

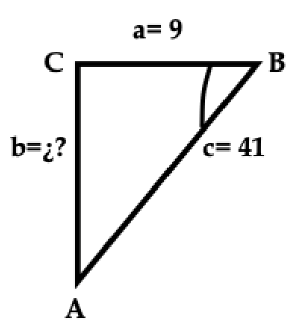
En la pregunta, ¿cuánto de hilo necesita comprar el director si hay que considerar de ida y vuelta?

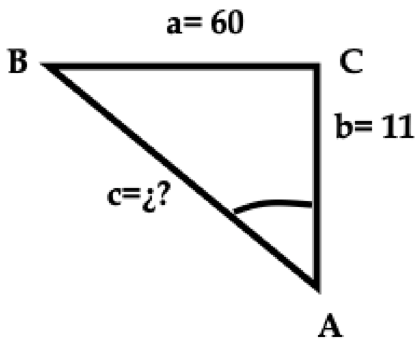
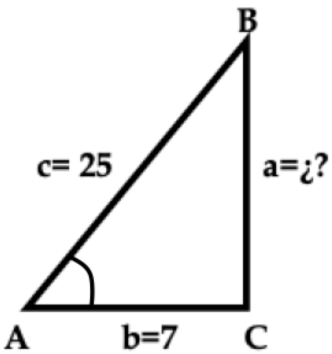
$$Total\ de\ hilo = (22.40)(2) = 44.80\ metros$$

Actividad 1.1

I. Instrucciones:

1. Resuelve los siguientes ejercicios en hojas de libreta o blancas, lo que tengas a la mano.
2. Escribe todas las razones trigonométricas y luego divide estas para hallar los valores para cada uno de los siguientes triángulos con respecto al ángulo que se te indica.
3. Si al calcular el tercer lado no te queda raíz cuadrada exacta, trabaja con el planteamiento de la raíz cuadrada. Ejemplo: $\sqrt{12}$.
4. Trabaja a cuatro decimales los valores trigonométricos.
5. Usa colores en el cuerpo del trabajo.

Situación	Escribe aquí las razones trigonométricas.
	$\boldsymbol{Sen\ B =}$ $\boldsymbol{Cos\ B =}$ $\boldsymbol{Tan\ B =}$ $\boldsymbol{Cot\ B =}$ $\boldsymbol{Sec\ B =}$ $\boldsymbol{Csc\ B =}$

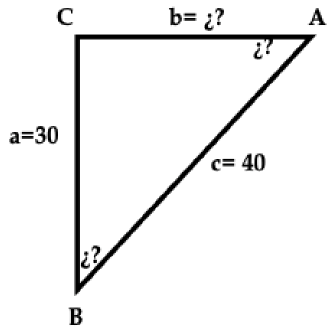
	$Sen\ A =$ $Cos\ A =$ $Tan\ A =$ $Cot\ A =$ $Sec\ A =$ $Csc\ A =$
	$Sen\ A =$ $Cos\ A =$ $Tan\ A =$ $Cot\ A =$ $Sec\ A =$ $Csc\ A =$

Actividad 1.2

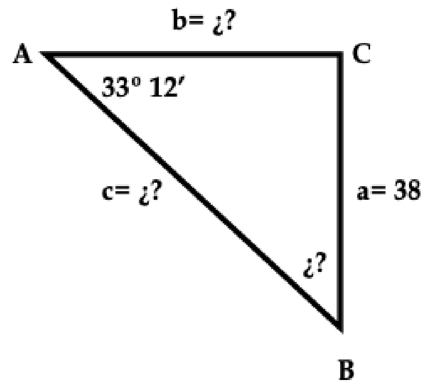
II. Instrucciones:

1. En hojas de libreta o blancas, resuelve los siguientes triángulos rectángulos, es decir, halla los valores de los lados y ángulos faltantes.
2. Si al calcular el tercer lado no te queda raíz cuadrada exacta, trabaja con el planteamiento de la raíz cuadrada. Ejemplo: $\sqrt{12}$.
3. Usa cuatro decimales para los valores trigonométricos y dos para los ángulos.
4. Usa colores en el cuerpo del trabajo.

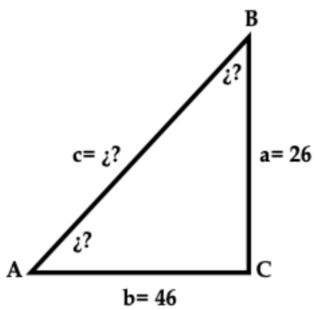
a)



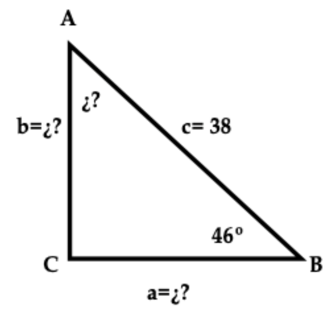
b)



c)



d)



Actividad 1.3

III. Instrucciones:

1. Resuelve los siguientes problemas en hojas de libreta o en hojas blancas.
2. Para cada problema traza un auxiliar visual.
3. Si al calcular el tercer lado no te queda raíz cuadrada exacta, trabaja con el planteamiento de la raíz cuadrada. Ejemplo: $\sqrt{12}$.
4. Usa cuatro decimales para los valores trigonométricos y dos para los ángulos.
5. Usa colores en el cuerpo del trabajo.

a) Desde la cúspide de un faro de 40 m de altura sobre el nivel del mar, se observa que el ángulo de depresión respecto de un velero es de 12º. Calcula la distancia horizontal del faro al barco.

b) Un árbol de 20 m de altura proyecta una sombra de 28 m de largo. Halla el ángulo de elevación del sol.

c) En un edificio se apoya una escalera cuyo pie se ubica a 1.4 m de la pared, ¿cuál es la longitud de la escalera, si el ángulo que forma con la pared es de 33º?

d) Cuando el sol está a 25º sobre el horizonte, ¿cuál es el largo de una sombra que proyecta un edificio de 15 m de altura?

e) A una distancia de 30 m de la base de una torre, un topógrafo observa que el ángulo de elevación a su cúspide es de 40º. Calcula la altura de la torre.

f) A 57 m del pie de una antena de radiodifusión, el ángulo de elevación en su extremo superior es de 29º 37′, ¿cuál es la altura de la antena si la del aparato con que se mide el ángulo es de 1.45 m?

Evaluación

- La actividad 1 te será evaluada con el instrumento 14, ubicado en el apartado Instrumentos para la evaluación.

3. Arriaga, A., Benítez, M., y Ramírez, L, Vive las matemáticas 2, Progreso Editorial, México, 2011.

Actividad 2

- **Aprendizaje Esperado:** Propone, de manera creativa, solución a problemas que involucran triángulos rectángulos, valorando su uso en la vida cotidiana. / Elige razones trigonométricas para proponer alternativas en la solución de triángulos rectángulos en situaciones de su entorno.
- **Atributo (s):** 4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.
- **Conocimiento (s):** Valores de las razones trigonométricas para ángulos notables.

Lectura previa

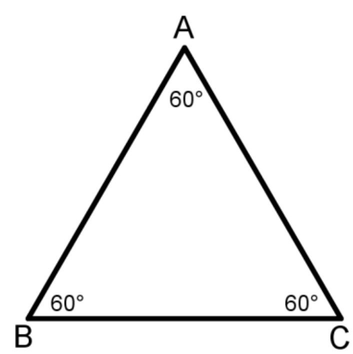
A continuación, se te explicará en qué triángulos puedes encontrar los ángulos notables, cómo se obtienen los valores de las razones trigonométricas y cuáles son.

ÁNGULO DE 30° Y 60°

Los ángulos de 30º y 60º están en los triángulos equiláteros.

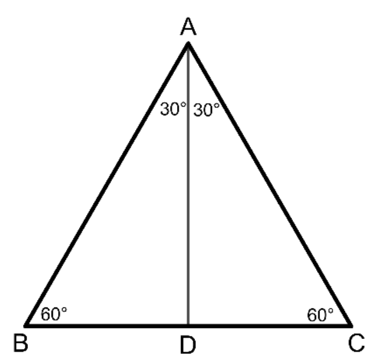
El de 60º lo obtienes cuando divides $\frac{180°}{3} = 60°$. Lo anterior es debido a que la suma de los ángulos interiores de un triángulo debe dar 180º y como es equilátero, entonces todos sus ángulos son iguales. Observa la figura 3:

Figura 3



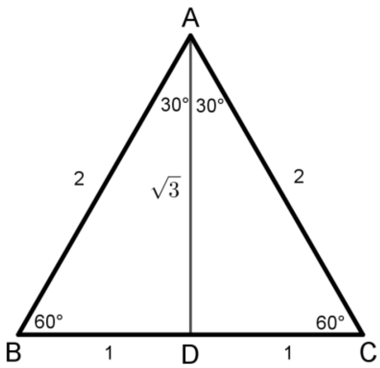
El ángulo de 30º se da cuando se traza la altura desde el vértice A hasta el lado BC. Recuerda que, en un triángulo equilátero, la bisectriz pasa en los mismos puntos que la altura, por lo que al ángulo A es partido a la mitad: $\frac{60°}{2} = 30°$. Además, si observas la figura 4, ya con la altura trazada, puedes visualizar dos triángulos rectángulos semejantes, el $\Delta ABD\ y\ \Delta ACD$.

Figura 4



Ahora, se procederá a ponerle medidas a los lados del triángulo. Se le puede poner cualquier valor, al final va a dar los mismos resultados, sin embargo, mientras más grandes son las medidas, los procesos suelen ser más largos y engorrosos. Por esta razón, lo más común es darle como medida 2 a cada lado, y de esta manera los resultados ya se obtienen simplificados. Observa la figura 5:

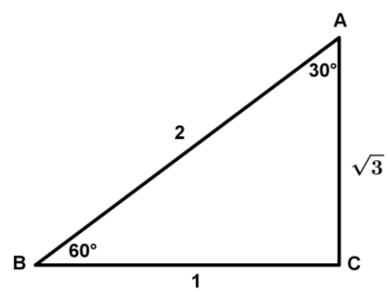
Figura 5



Es importante mencionarte que, en un triángulo equilátero, la mediana también pasa por los mismos puntos que la altura, es por eso que si el lado BC mide 2 unidades y el punto D lo divide a la mitad, entonces BD y CD miden 1 unidad.

Ahora, la altura la calculas aplicando el teorema de Pitágoras, para cualquiera de los dos triángulos semejantes: $h = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{4 - 1} = \sqrt{3}$

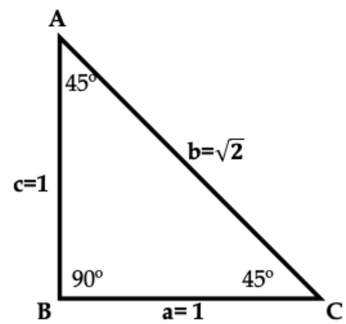
Ya teniendo los tres lados de cada triángulo, observa cómo se obtienen los valores de las razones trigonométricas para los ángulos de 30º y 60º.



Para ángulo de 60º desde el ángulo B	Para ángulo de 30º desde el ángulo A
$Sen\ 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$Sen\ 30° = \frac{1}{2}$
$Cos\ 60° = \frac{1}{2}$	$Cos\ 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$Tan\ 60° = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$	$Tan\ 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$
$Cot\ 60° = \frac{1}{\sqrt{3}}$	$Cot\ 30° = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$
$Sec\ 60° = \frac{2}{1} = 2$	$Sec\ 30° = \frac{2}{\sqrt{3}}$
$Csc\ 60° = \frac{2}{\sqrt{3}}$	$Csc\ 30° = \frac{2}{1} = 2$

El ángulo de 45º tiene su origen en los triángulos rectángulos isósceles. Recuerda que los dos ángulos agudos en este tipo de triángulos suman 90º y como tiene dos lados iguales, entonces también tienes dos ángulos iguales: $\frac{90°}{2} = 45°$.

En cuanto a la medida de los lados, para simplificar los procesos (aunque ya sabes que se puede hacer con cualquier valor) se acostumbra darles a los dos lados iguales el valor de 1, como lo puedes ver en la imagen:



El tercer lado (b), como siempre, aplicas el teorema de Pitágoras para obtenerlo:

$$b = \sqrt{(1)^2 + (1)^2}$$
$$b = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

Conociendo los tres lados se procede al cálculo de los valores trigonométricos para los ángulos de 45º a partir del ángulo C, aunque si lo haces desde A, te va a dar lo mismo.

Valores trigonométricos para ángulos de 45º
$Sen\ 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$
$Cos\ 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$
$Tan\ 45° = \frac{1}{1} = 1$
$Cot\ 45° = \frac{1}{1} = 1$
$Sec\ 45° = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$
$Csc\ 60° = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$

Estos valores trigonométricos se resumen en la siguiente tabla:

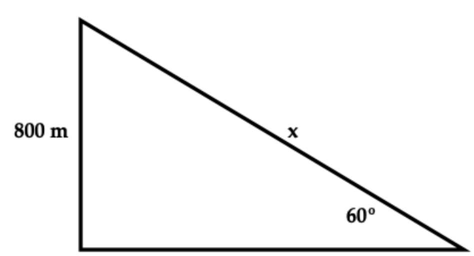
Función	30º	45º	60º
Seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Coseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$
Tangente	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$
Cotangente	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
Secante	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2
Cosecante	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$

Los valores contenidos en la tabla son los que te servirán cuando resuelvas problemas que involucren los ángulos notables, los cuales, para hacerlo, debes tomar en cuenta todos los consejos que se te dieron cuando resolviste los problemas de la sección III de la actividad 1.

Ejemplo 1

Un excursionista desea subir a la parte más alta de un cerro que tiene 800 m de altura. Si el camino por donde va a subir tiene un ángulo de elevación de 60º, ¿qué distancia deberá recorrer para llegar a su meta?[4]

Datos:
Altura del cerro: 800 m
Ángulo de elevación del camino de subida: 60º
Pregunta: ¿Distancia para llegar a la cima?



A partir del ángulo que conoces, seleccionas la razón directa que compara los lados que se te dan. En este caso tienes la altura de 800 m que es el cateto opuesto y x la hipotenusa, por lo tanto, la razón directa que se debe aplicar es seno, como a continuación se te presenta:

$$Sen\ 60° = \frac{800}{x}$$

4. Arriaga, A., Benítez, M., y Ramírez, L., Vive las matemáticas 2, Progreso Editorial, México, 2011.

Ahora, Sen 60º equivale a $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (consulta la tabla de los valores trigonométricos) y este valor se sustituye en la expresión anterior quedando: $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{800}{x}$

Se despeja x para saber la distancia que el excursionista tiene que recorrer para llegar a la cima de la montaña.

$$\frac{\sqrt{3}}{2}x = 800$$

$$x = \frac{800}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$x = 923.76\, metros$$

Actividad 2

Instrucciones:

1. En hojas blancas o de libreta resuelve los siguientes problemas.
2. Para resolver, usa los valores trigonométricos para ángulos notables que están contenidos en la tabla ubicada en la página anterior de este material.
3. Traza un auxiliar visual para cada problema.
4. Si al calcular el tercer lado no te queda raíz cuadrada exacta, trabaja con el planteamiento de la raíz cuadrada. Ejemplo: $\sqrt{12}$.
6. Usa cuatro decimales para los valores trigonométricos y dos para los ángulos.
7. Usa colores en el cuerpo del trabajo.

1. Se coloca una tabla de 3 metros como rampa para subir una carretilla con carga desde el piso a la parte trasera de un camión. La tabla forma un ángulo de 30º con el piso. ¿Cuál es la altura de la plataforma del camión?

2. Se recarga una escalera en la pared formando un ángulo con ella de 60º. La distancia que hay entre el pie de la pared y el de la escalera es de 3 metros. ¿Cuál es la longitud de la escalera?

3. Un automóvil sube una cuesta cuya inclinación con la horizontal es de 30º. ¿A qué altura ha llegado después de recorrer sobre ella 25 Km?

4. Un marino observa desde un acantilado una embarcación que se acerca a tierra. Para ello, tiene que colocar su catalejo en un ángulo de 45º por debajo de la horizontal. Si la altura del cantil es de 80 metros sobre el nivel del mar, ¿a qué distancia se encuentra la embarcación del cantil suponiendo que este se asemeja a una pared vertical?

5. Mariano y su papá salen al campo a volar una cometa. Después de haber soltado 20 metros de hilo, ¿a qué altura se encuentra la cometa si el hilo forma con el piso un ángulo de 45º?

6. Calcula la altura de un muro sabiendo que su sombra mide 13 metros cuando los rayos del sol forman un ángulo de 60º con el suelo.

Evaluación

- La actividad 2 te será evaluada con el instrumento 14, ubicado en el apartado Instrumentos para la evaluación.

VALORANDO MI AVANCE

Para concluir, contesta en tu libreta las siguientes preguntas con respecto de lo que aprendiste en este bloque:

- ¿Qué estoy aprendiendo?
- ¿En qué aprendizajes esperados aún tengo dificultades?
- ¿Qué acciones puedo realizar para mejorar mi desempeño?
- ¿Qué estrategias de estudio me han funcionado en este bloque?

BLOQUE V. Funciones trigonométricas

Actividad 1

- **Aprendizaje Esperado:** Desarrolla estrategias para obtener los valores de las funciones trigonométricas utilizando el ángulo de referencia, tablas y/o calculadora, con la finalidad de interpretar fenómenos sociales y naturales.
- **Atributo (s):** 4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.
- **Conocimiento (s):** Signos de las funciones trigonométricas en los cuadrantes.

Lectura previa

Lee con mucha atención el siguiente texto:

CONCEPTOS PREVIOS AL BLOQUE

Hagamos un repaso breve, en el bloque anterior analizaron las propiedades y principios de la trigonometría, en este bloque continuaremos con su estudio con algo un poquito más avanzado, pero antes de iniciar, repasemos algunos términos y conceptos claves.

- **TRIGONOMETRÍA**

Es una parte muy importante de las matemáticas, cuyo origen se remonta a miles de años y se desarrolló por las aportaciones matemáticas de pueblos de la antigüedad, como el egipcio y el babilónico que estudiaron las razones entre los lados de triángulos semejantes. El ingenio matemático griego manejó las relaciones entre ángulos trazados en un círculo y las longitudes de los arcos subtendidos por ellos. Aunque en ese entonces la matemática no contaba con el concepto de medida de un ángulo (término muy importante que abordaremos en este bloque), usaban de manera equivalente los arcos de una circunferencia. Así, podemos observar, que la trigonometría se fue construyendo hasta lo que conocemos hoy día, y no siempre se usó con medidas de ángulos ni únicamente en triángulos, como pudiera parecer. No hay que olvidar, que, a pesar de sus principios, las aplicaciones de la trigonometría son muy amplias y variadas hoy día, bien, suele emplearse en la arquitectura, ingeniería, navegación, astronomía, mecánica, etc., por mencionar algunos, además, son la base para el estudio de las matemáticas más avanzadas como la geometría analítica y el cálculo diferencial e integral.

- **DEFINICIÓN DE TRIGONOMETRÍA**

La palabra *trigonometría* proviene de dos vocablos griegos: "trígono" que significa triángulo y "metria" cuyo significado es medición. Por lo tanto, podemos decir que:
"La trigonometría es la parte de la geometría que estudia las relaciones existentes entre las longitudes de los lados y las medidas de los ángulos de los triángulos"

- **FUNCIONES O RAZONES TRIGONOMÉTRICAS**

Es la razón que existen entre las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo, las cuales son seis, como pudiste observar en el estudio del **bloque anterior**:

SENO DE UN ÁNGULO: Es la razón entre el cateto opuesto y la hipotenusa.
COSENO DE UN ÁNGULO. Es la razón entre el cateto adyacente y la hipotenusa.
TANGENTE DE UN ÁNGULO. Es la razón entre el cateto opuesto y el cateto adyacente.
COTANGENTE DE UN ÁNGULO. Es la razón entre el cateto adyacente y el opuesto.
SECANTE DE UN ÁNGULO. Es la razón entre la hipotenusa y el cateto adyacente.
COSECANTE DE UN ÁNGULO. Es la razón entre la hipotenusa y el cateto opuesto.

Nota: ***los catetos se nombran según el ángulo agudo que se utilice.***

Un **recurso nemotécnico** para recordar estas seis funciones o razones trigonométricas es memorizando la siguiente frase (realmente es una frase que carece de significado):

CO CA CO CA HIP HIP

Observa que la frase ya tiene los nombres abreviados de los lados del triángulo.

HIPOTENUSA	**(HIP)**
CATETO OPUESTO	**(CO)**
CATETO ADYACENTE	**(CA)**

Escribir un arreglo como este:

$$\begin{array}{cccccc} \dfrac{CO}{HIP} & \dfrac{CA}{HIP} & \dfrac{CO}{CA} & \dfrac{CA}{CO} & \dfrac{HIP}{CA} & \dfrac{HIP}{CO} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ SEN & COS & TAN & COT & SEC & CSC \end{array}$$

Observa, que en la parte superior (arriba) la frase va de izquierda a derecha, y en la parte inferior (abajo) la frase va de derecha a izquierda.

Veamos cómo funciona, imagina que necesitas resolver el siguiente ejercicio de trigonometría: “Halla el ángulo de elevación si una persona de 1.58 m de altura proyecta una sombra de 3.6 metros.”

Solución: Aquí, necesitamos el uso de las razones trigonométricas, por tanto, analizando el arreglo anterior nos damos cuenta de que según el ángulo agudo θ contamos con los dos catetos (cateto opuesto 1.8 m y cateto adyacente 3.6 m). Observemos. $\dfrac{CO}{CA} \downarrow TAN$

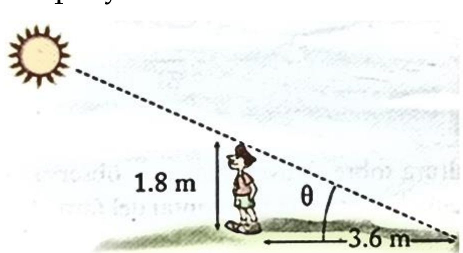


Imagen tomada de libro

Esto nos muestra que la razón o función trigonométrica a usar es la Tangente.

$$tan\ \theta = \frac{\text{CO}}{\text{CA}} = \frac{1.8}{3.6} = 0.5$$

Si se despeja el ángulo θ, con la razón inversa, nos quedará:

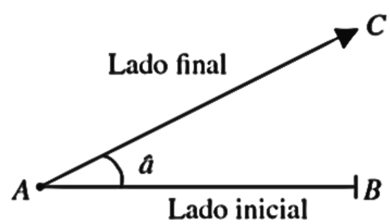
$$\theta = tan^{-1}\ (0.5) = 26.57°$$

Por lo tanto, el ángulo de elevación que se pide será: $\theta = 26.57°$

(*Para activar la función inversa, en la calculadora oprimimos un par de teclas, primero la tecla SHIFT y posteriormente la tecla TAN y se activa la función inversa:* tan^{-1})

- **ÁNGULOS**

Definición. Un ángulo es la abertura comprendida entre 2 semirrectas que tienen un punto en común, llamado vértice.



El ángulo se representa como $\angle A$, $\angle BAC$, $\hat{a}$, o con letras del alfabeto griego. Si un ángulo se mide en sentido contrario al movimiento de las manecillas de un reloj, entonces es positivo, si se mide en el mismo sentido entonces será negativo.

En el ejemplo anterior, el problema solicitaba que se calcule un ángulo, en ese caso particular, un ángulo de elevación, y el resultado se obtuvo en grados, es decir, veintiséis puntos cincuenta y siete grados ($\theta = 26.57°$), pero, en trigonometría, no es la única manera o forma de representar un ángulo, de hecho, hay una forma más, de la cual estaremos hablando a continuación.

Una unidad de medida para los ángulos es el *GRADO*, aplicando el sistema sexagesimal, este sistema de medir ángulos es el que se emplea normalmente: la circunferencia se divide en 360 partes llamadas grados, el grado en 60 partes llamadas minutos y el minuto en 60 partes que reciben el nombre de segundos. Entonces 1° = 60′; 1′ = 60″.

La otra forma de medir un ángulo es el **RADIÁN**, aplicando el sistema cíclico o circular, este sistema utiliza como unidad fundamental al radián. El radián es el ángulo central subtendido por un arco igual a la longitud del radio del círculo. Se llama valor natural o valor circular de un ángulo.

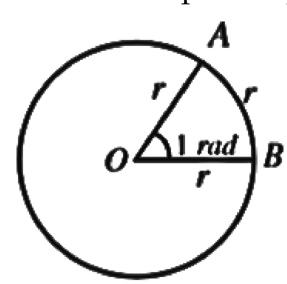


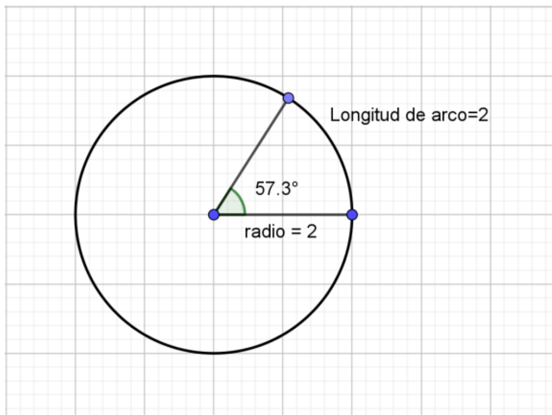
Imagen tomada de libro

Hablemos un poquito más del RADIÁN.

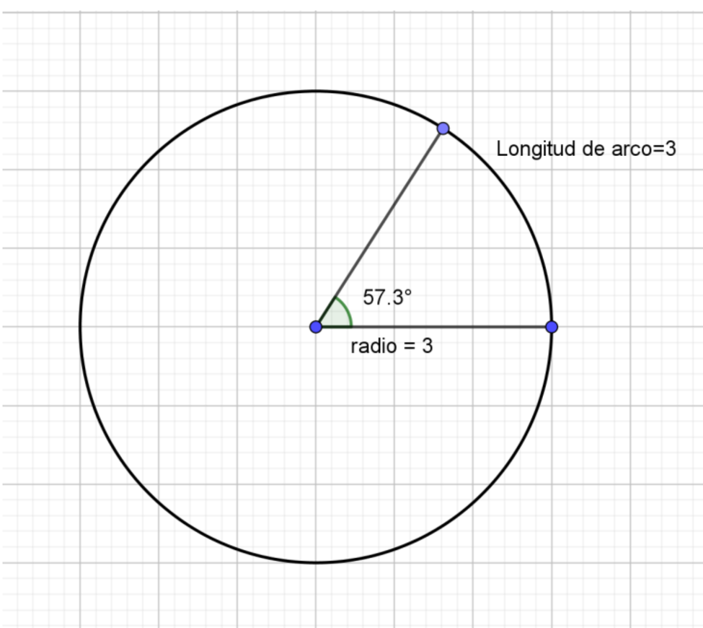
RADIÁN

Recordemos que un radián es la *medida de un ángulo* central de una circunferencia cuya longitud de *arco* es igual a su *radio*.

Observa este ejemplo, se traza una circunferencia de radio igual a 2 y se traza el arco igual a la medida del radio 2, entonces la medida del ángulo central de la circunferencia, es exactamente un radián, cuyo valor como se muestra en la figura será de 57.3°.



Ahora tracemos otra circunferencia con radio igual a 3 y longitud de arco igual a 3.



Observamos que la medida del ángulo no cambió siempre se obtiene 57.3°.

Entonces, así como acostumbramos a decir que un ángulo recto mide 90°, un ángulo llano mide 180°, **también un radián mide 57.3°** (aproximadamente 57.2958°).

Vamos a relacionar estas dos unidades de medida, ya que son muy útiles en el estudio de la trigonometría, repasemos un poco más.

Para entender mejor la relación, definamos algunos términos:

CIRCUNFERENCIA: Es el conjunto de puntos que equidistan de un punto fijo llamado centro y su longitud representa el perímetro del círculo.

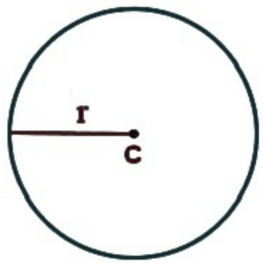


Figura recuperada de Google

ARCO: Nombre que recibe una parte de la circunferencia.

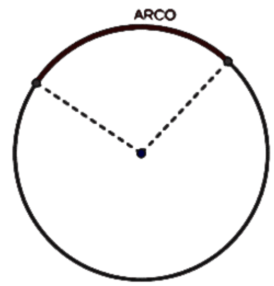


Figura recuperada de Google

PI (π)

Es la relación entre la longitud de una circunferencia y su diámetro en geometría euclidiana. Es un número irracional y una de las constantes matemáticas más importantes.

Su valor con algunas cifras decimales es: $\pi = 3.14159265359\ldots$

Pero generalmente, el valor de PI (π) se toma como $\pi = 3.1416$, redondeado a cuatro cifras decimales.

Sabemos que una circunferencia tiene un ángulo de 360°, es decir una vuelta completa, pero también podemos conocer la longitud de una circunferencia con fórmulas de geometría elemental:

$$\mathbf{Circunferencia = \pi \times d}$$

También sabemos que el diámetro es dos veces el radio: $\mathbf{d = 2r}$

Circunferencia = π × 2r (podemos reescribir π × 2r, por 2π × r, sin alterar el producto)
Circunferencia = 2π × r (pero la longitud de la circunferencia en grados es 360°)

$$\mathbf{360° = 2\pi \times r}$$

Como el radio debe ser igual al arco (según la definición de radián), entonces podemos decir que ya hay un radián, por tanto, cambiamos la “r” de radio por radián:

$$2\pi \text{ radián} = 360°$$

$$\pi \text{ radián} = \frac{360°}{2} = 180°$$

$$\pi \text{ radián} = 180°$$

Como un radián vale 57.3°, entonces comprobamos la expresión anterior.

De lo cual deducimos que: $3.1416 \times 57.3 \approx 180°$

De todo lo anterior concluimos que la relación entre grados y radianes será:

(1). $180° = \pi$ radianes

(2). $1° = \frac{\pi}{180°}$ radianes ≈ 0.0175 radianes

(3). 1 radián $= \frac{180°}{\pi} \approx 57.2958°$ (para ser más precisos)

De lo anterior, si representamos con S la medida de un ángulo en grados sexagesimales y con R la medida del mismo ángulo en radianes, podemos establecer la siguiente proporción:

$$\boldsymbol{\frac{S}{180°} = \frac{R}{\pi}}$$

Ejemplo 1

Fíjate como podemos usar esta proporción para convertir una unidad de medida a otra

Expresar en radianes un ángulo de 90°.

Solución: Usaremos la proporción anterior.

$$\frac{S}{180°} = \frac{R}{\pi}$$

$\frac{90°}{180°} = \frac{R}{\pi}$, se resuelve la siguiente proporción, con el producto cruzado. (*recuerda que la S representa a los grados y la R a los radianes*)

$(\pi)(90°) = (R)(180°)$

$R = \frac{90\pi}{180}$, se simplifica la fracción.

$R = \frac{\pi}{2} rad.$ Por lo tanto, 90° es igual a $\frac{\pi}{2} rad.$

Ejemplo 2

Analicemos una situación más, pero ahora lo contrario, expresar en grados sexagesimales un ángulo de $\boldsymbol{2\pi}$ radianes.

$$\frac{S}{180°} = \frac{R}{\pi}$$

$\frac{S}{180°} = \frac{2\pi}{\pi}$, se resuelve la siguiente proporción, con el producto cruzado.

$$(S)(\pi) = (2\pi)(180)$$

$S = \frac{(2)(180)(\pi)}{\pi} = \frac{360\pi}{\pi} = 360°$, se simplifica la fracción. (aquí, se cancela π)

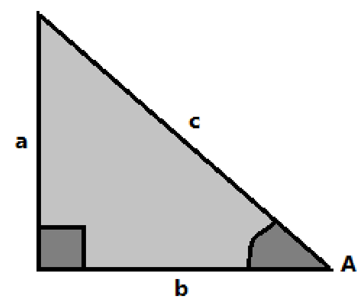
$S = 360°$. Por lo tanto, 2π radianes es igual a 360°.

Ahora, te proponemos que resuelvas la siguiente actividad a modo de repaso.

Actividad 1.1

Instrucciones:

1. Si designamos con a, b y c los lados de un triángulo rectángulo, completa la siguiente tabla de las razones trigonométricas.



RECUERDA: Puedes usar la frase "**CO CA CO CA HIP HIP**".

Razón trigonométrica	Abreviatura	Razones respecto al ángulo $\measuredangle A$
Seno de $\measuredangle A$	Sen A	Sen A $= \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa} = \frac{a}{c}$
Coseno de $\measuredangle A$	Cos A	Cos A = ____________ = —
Tangente de $\measuredangle A$	Tan A, tg A	Tan A = ____________ = —
Cotangente de $\measuredangle A$	Cot A, ctg A	Cot A = ____________ = —
Secante de $\measuredangle A$	Sec A	Sec A = ____________ = —
Cosecante de $\measuredangle A$	Csc A	Csc A = ____________ = —

Actividad 1.2

Instrucciones:

1. Seguimos avanzando, ahora usaremos las medidas de los ángulos en grados y radianes. Si prestaste atención en los dos ejemplos anteriores de repaso, entonces, usa esa misma técnica para obtener la tabla siguiente, donde se incluyen las medidas correspondientes a radianes y grados de ángulos especiales. (*Estos ángulos especiales, te serán de mucha utilidad, cuando estés representando gráficamente las funciones o razones trigonométricas*).
2. Resuelve los siguientes ejercicios en hojas de libreta o blancas, lo que tengas a la mano.

Por ejemplo, buscamos a cuanto equivale $\frac{7\pi}{6}$ radianes a grados.

$\frac{S}{180°} = \frac{R}{\pi}$ $\frac{S}{180°} = \frac{\frac{7\pi}{6}}{\pi}$, se resuelve la siguiente proporción, con el producto cruzado.

$(S)(\pi) = (\frac{7\pi}{6})(180)$

$S = \frac{\left(\frac{7}{6}\right)(180)(\pi)}{\pi} = \frac{210\,\pi}{\pi} = 210°$, se simplifica la fracción, se cancela π.

$S = 210°$. Por lo tanto, $\frac{7\pi}{6}$ radianes es igual a 210°.

ÁNGULOS ESPECIALES	
GRADOS	RADIANES
0°	0
30°	
	$\frac{\pi}{4}$
60°	
90°	
	$\frac{2\pi}{3}$
135°	
150°	

ÁNGULOS ESPECIALES	
GRADOS	RADIANES
	π
210°	$\frac{7\pi}{6}$
225°	
	$\frac{4\pi}{3}$
270°	
300°	
	$\frac{7\pi}{4}$
330°	
	2π

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

SIGNOS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS EN EL PLANO CARTESIANO

Si un triángulo rectángulo se ubica en el plano cartesiano, de manera que uno de sus catetos coincida con el eje horizontal (eje "x"), las funciones trigonométricas tendrán un signo dependiendo del cuadrante sobre el cual se encuentre dicho triángulo.

Vamos a trabajar con el primer cuadrante. (*Recuerda, que los cuadrantes se numeran en sentido contrario al de las agujas del reloj, iniciando por la parte superior derecha*).

En este primer cuadrante, también se observa que, los signos tanto para el eje "x" como para el eje "y" son positivos. Trazamos un triángulo rectángulo en él, con un ángulo agudo θ (Theta), el cateto opuesto a dicho ángulo será el lado paralelo al eje "y", cuyo signo será "+", mientras que el cateto adyacente estará sobre el eje horizontal "x", cuyo signo también será "+", la hipotenusa será el tercer lado y es la mayor que los catetos, este siempre tendrá de signo "+". Ahora los signos de las tres primeras funciones trigonométricas en el primer cuadrante serán:

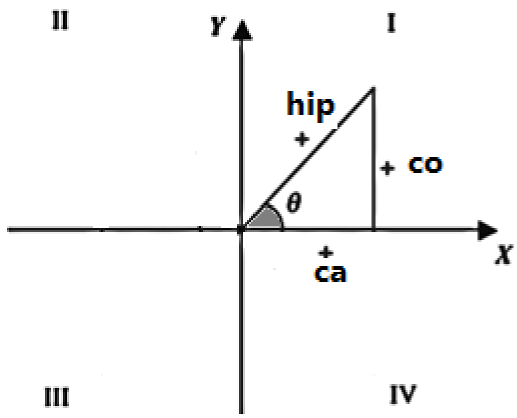


Figura tomada de libro (reedición propia)

$$\text{Sen } \theta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{+}{+} = +$$

$$\text{Cos } \theta = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{+}{+} = +$$

$$\text{Tan } \theta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{+}{+} = +$$

Vamos a encontrar los signos de las tres primeras funciones trigonométricas en el segundo cuadrante:

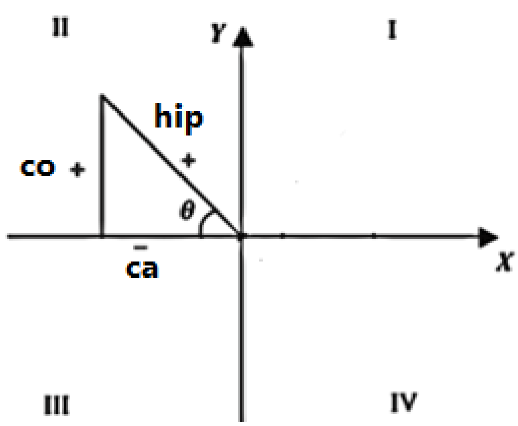


Figura tomada de libro (reedición propia)

$$\text{Sen } \theta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{+}{+} = +$$

$$\text{Cos } \theta = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{-}{+} = -$$

$$\text{Tan } \theta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{+}{-} = -$$

Actividad 1.3

Instrucciones:

1. Ya estás listo para trabajar con los cuatro cuadrantes. Llena la siguiente tabla con los signos correspondientes de las funciones trigonométricas según el cuadrante que se encuentren. (*Puedes usar la frase CO CA CO CA HIP HIP, para la definición de las funciones trigonométricas*)

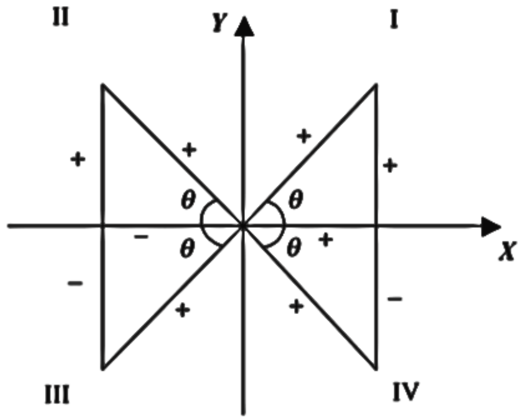


Figura tomada de libro

	I Cuadrante	II Cuadrante	III Cuadrante	IV Cuadrante
Seno	+	+		
Coseno	+	-		
Tangente	+	-		
Cotangente				
Secante				
Cosecante				

Evaluación:

- La actividad te será evaluada con el instrumento 15, ubicado en el apartado Instrumentos para la evaluación.

Actividad 2

- **Aprendizaje Esperado:** Explica de forma crítica, la gráfica de las funciones trigonométricas: seno, coseno y tangente, relacionándola con el comportamiento de fenómenos de su entorno.
- **Atributo (s):** 4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.
- **Conocimiento (s):** Signos de las funciones trigonométricas en los cuadrantes/Gráficas de las funciones trigonométricas.

Lectura previa

Lee con mucha atención el siguiente texto:

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

LAS GRÁFICAS

Las funciones trigonométricas pueden comprenderse como la asociación de cada elemento de un primer conjunto (de números reales en nuestro caso) con un único elemento de un segundo conjunto (constituido también por números reales). Estas funciones pueden representarse de tres formas: numérica a través de una tabla, geométrica a través de una gráfica y también de forma analítica, a través de una ecuación que relacione un par de variables. Todas las funciones trigonométricas cumplen con estas condiciones.

Al establecer una regla de correspondencia entre dos conjuntos, por medio de las funciones trigonométricas, se establecen relaciones como:

$$\boldsymbol{y = sen\ x}$$

$$\boldsymbol{f(x) = \cos x}$$

$$\boldsymbol{y = tan\ (-x)}$$

No te desalientes, te explicamos que significa regla de correspondencia.

Una regla de correspondencia consiste en asignar un elemento único de un cierto conjunto a cada elemento único de otro conjunto. Este concepto es de uso frecuente cuando se trabaja con funciones matemáticas.

Mira este ejemplo para que tengas una idea más clara de lo que se dice en la definición.

Imagina que te encuentras en casa con tus amigos. La noche es lluviosa, con grandes relámpagos seguidos de truenos. No pueden disfrutar plenamente de la película, al observar por la ventana, alguien recuerda que existe una forma de estimar la distancia a la que cae el rayo, contando los segundos que transcurren desde el relámpago hasta el trueno y multiplicarlo por tres, la distancia así encontrada es en kilómetros.

¿Cuál será la regla de correspondencia en esta situación?
Muy fácil, se observa claramente que es un múltiplo de tres, entonces, matemáticamente se escribe así:

$$y = 3x$$

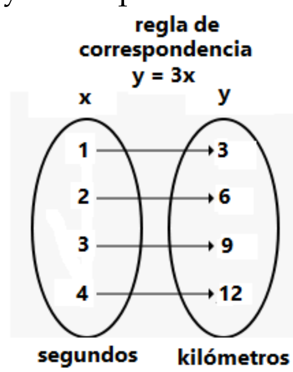
Del cual, se deduce, que la "y" representa la distancia en kilómetros a la que cae el rayo. La "x" representa los segundos que transcurren desde el relámpago hasta el trueno. Ves que fácil es.

Si alguien de tus amigos te preguntara, ¿a qué distancia será que cayó el rayo que acaba de pegar al suelo si se contó 2 segundos?

Tu respuesta sería 6 kilómetros, ¿Por qué?, porque usaste la regla de correspondencia:

$$y = 3x$$
$$y = 3(2) = 6 \text{ Km.}$$

Así es como se forman las reglas de correspondencia, mediante ecuaciones matemáticas que surgen de alguna situación cotidiana y de un problema matemático.



Ahora sí, vamos a trabajar con las funciones trigonométricas.

El siguiente paso es que construyas una gráfica de las funciones trigonométricas.

Ejemplo 1

Para realizar las gráficas de las funciones trigonométricas, debemos relacionar los dos elementos (regla de correspondencia) que usaremos, por un lado, la medida de los ángulos, en este caso usaremos los ángulos especiales en radianes (*recuerdas que anteriormente comentamos que serán de gran utilidad, pues ahora los usaremos aquí*) y por el otro, el valor de ese ángulo aplicando una función trigonométrica.

Se te proporciona una tabla de valores para la variable "x" que deberás relacionar con una función y encontrar los valores correspondientes de la variable "y" (*como en el ejemplo del rayo*), para que así, podamos trazar la gráfica.

Graficar $y = \text{sen } x$

Función $y = \text{sen } x$																	
Ángulos especiales																	
	Primer Cuadrante				**Segundo Cuadrante**				**Tercer Cuadrante**				**Cuarto Cuadrante**				
x	**0°**	**30°**	**45°**	**60°**	**90°**	**120°**	**135°**	**150°**	**180°**	**210°**	**225°**	**240°**	**270°**	**300°**	**315°**	**330°**	**360°**
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
y	0	0.5	0.7	0.9	1	0.9	0.7	0.5	0	-0.5	-0.7	-0.9	-1	-0.9	-0.7	-0.5	0

$y = \text{sen } x$

$y = \text{sen }(0) = 0$ $\quad y = \text{sen }(30) = 0.5$ $\quad y = \text{sen }(45) = 0.7$ $\quad y = \text{sen }(60) = 0.9$

$y = \text{sen }(90) = 1$ $\quad y = \text{sen }(120) = 0.8$ $\quad y = \text{sen }(135) = 0.7$ $\quad y = \text{sen }(150) = 0.5$

$y = \text{sen }(180) = 0$ $\quad y = \text{sen }(210) = -0.5$ $\quad y = \text{sen }(225) = -0.7$ $\quad y = \text{sen }(240) = -0.9$

$y = \text{sen }(270) = -1$ $\quad y = \text{sen }(300) = -0.9$ $\quad y = \text{sen }(315) = -0.7$ $\quad y = \text{sen }(330) = -0.5$

$y = \text{sen }(360) = 0$

Nota: *Para calcular los valores anteriores, debes recurrir al uso de tu calculadora con la tecla "sin", que significa "seno"*

Ahora que ya se tiene los valores, debemos formar las parejas ordenadas (x, y).
$(0,0)$, $(\frac{\pi}{6}, 0.5)$, $(\frac{\pi}{4}, 0.7)$, $(\frac{\pi}{3}, 0.9)$, $(\frac{\pi}{2}, 1)$, $(\frac{2\pi}{3}, 0.8)$, $(\frac{3\pi}{4}, 0.7)$, $(\frac{5\pi}{6}, 0.5)$, $(\pi, 0)$,
$(\frac{7\pi}{6}, -0.5)$, $(\frac{5\pi}{4}, -0.7)$, $(\frac{4\pi}{3}, -0.9)$, $(\frac{3\pi}{2}, -1)$, $(\frac{5\pi}{3}, -0.9)$, $(\frac{7\pi}{4}, -0.7)$, $(\frac{11\pi}{6}, -0.5)$, $(2\pi, 0)$,

Dibujemos un plano cartesiano y localicemos cada pareja ordenada en él. Después, con tu lápiz, une los puntos cuidadosamente para formar la gráfica de la función seno.
Aquí te mostramos la primera parte de la gráfica, que corresponde al primer y segundo cuadrante.

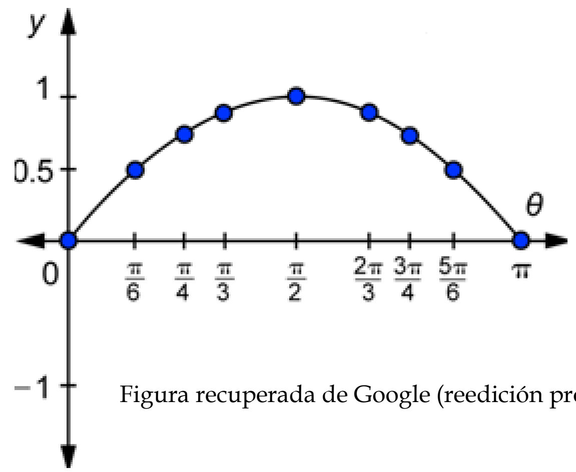


Figura recuperada de Google (reedición propia)

Si realizaste la tabla de los signos de la actividad anterior de manera adecuada (*considerando que sí*), entonces observarás que la función seno en el primer cuadrante es positivo. (*El primer cuadrante va de 0° a 90°*), y en el segundo cuadrante, también es positivo (*Segundo cuadrante va de 90° a 180°*). Puedes analizar los cuadrantes de la tabla anterior.

Ahora, observa el comportamiento de la función seno en los cuatro cuadrantes.

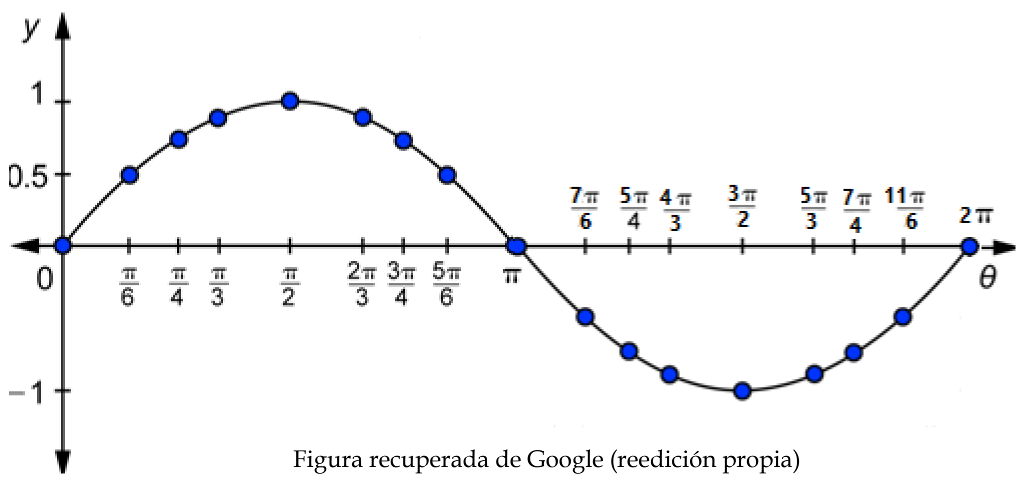


Figura recuperada de Google (reedición propia)

Observarás que el tercer y cuarto cuadrante la función seno es negativa. (*Tercer cuadrante va de 180° a 270°*), (*Cuarto cuadrante va de 270° a 360°*).
Este comportamiento de la función seno se repite indefinidamente.
Observa la siguiente gráfica. $y = \text{sen } x$

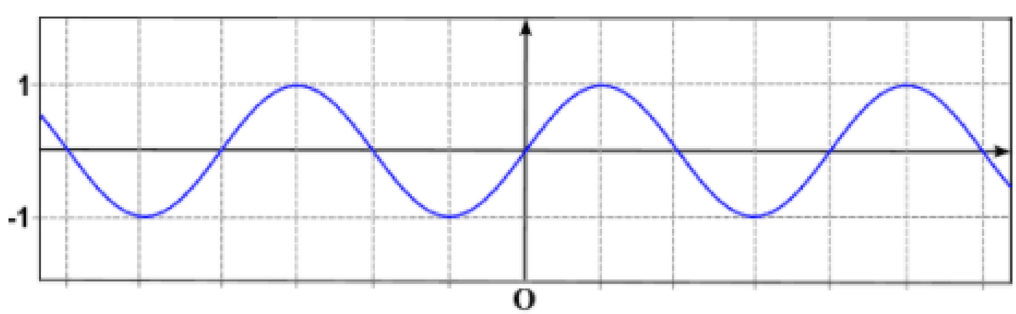


Figura recuperada de Google

Algunas características de la función $y = \text{sen } x$, analizando el comportamiento gráfico.

a) La función tiene periodo igual a 2π radian, esto quiere decir que en una vuelta completa la grafica toma la misma forma.
   Pero, que es un **periodo**, bueno, se define como el tiempo en completar un ciclo. Gráficamente es la longitud del intervalo que representa un ciclo completo de curva (que va de 0° a 360°).
b) La función crece en el primer y cuarto cuadrante, es decir de 0° a 90° y de 270° a 360°.
c) La función decrece en el segundo y tercer cuadrante, es decir de 90° a 180° y de 180° a 270°.
d) La función es positiva en el primero y segundo cuadrante y es negativa en el tercero y cuarto cuadrante.
e) Los valores de los ángulos (*valor del eje "x"*), son infinitos, es decir acepta números negativos infinitos y números positivos infinitos. $-\infty < x < +\infty$.
f) Se observa que la función seno tiene una amplitud de -1 hasta +1, eso quiere decir, $-1 \leq y \leq +1$.
   Pero, que es una amplitud, bueno, representa la mitad de la distancia vertical que va desde el punto más alto al más bajo de la gráfica.

Ya estas listo para realizar la siguiente actividad.

Actividad 2

Con el análisis del ejemplo anterior, ya puedes realizar la gráfica de las dos funciones trigonométricas restantes, se te proporcionará la tabla y los valores en grados y radianes, por lo que deberás llenar de acuerdo a la función (para esto deberás usar tu calculadora), para que obtengas las parejas ordenadas y puedas localizarlos en el plano cartesiano y con esos puntos trazar cuidadosamente la gráfica.

Instrucciones:

1. Encuentra el valor de la variable "y", según sea la función.
2. Escribe todas las parejas ordenadas que se encuentran en la tabla, (x, y).
3. Traza un plano cartesiano y localiza en él los puntos de los pares ordenados.
4. Une con mucho cuidado los puntos localizados en el plano cartesiano para dibujar la gráfica de la función.
5. Escribe algunas características que observes de la función.

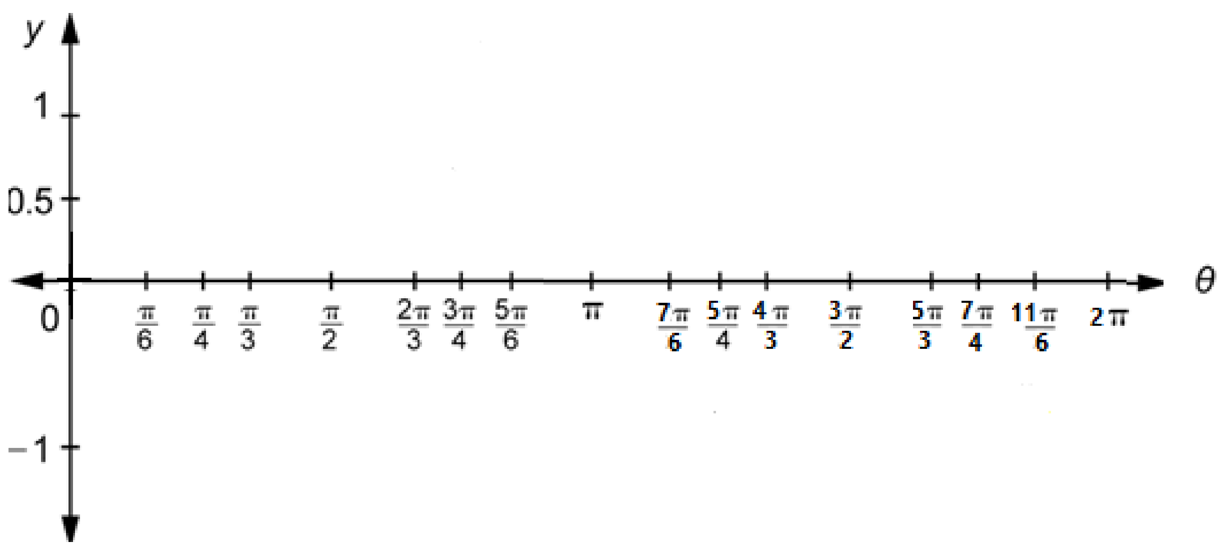
Graficar $y = \cos x$

Función $y = cos\ x$																	
Ángulos especiales																	
	Primer Cuadrante				**Segundo Cuadrante**				**Tercer Cuadrante**				**Cuarto Cuadrante**				
x	**0°**	**30°**	**45°**	**60°**	**90°**	**120°**	**135°**	**150°**	**180°**	**210°**	**225°**	**240°**	**270°**	**300°**	**315°**	**330°**	**360°**
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
y	**1**	**0.9**	**0.7**	**0.5**													

$y = \cos x$

$y = \cos(0) = 1$ $\quad y = \cos(30) = 0.9$ $\quad y = \cos(45) = 0.7$ $\quad y = \cos(60) = 0.5$

Continua con los cálculos.
Aquí, realiza tu gráfica o en tu libreta de apuntes



Graficar $y = \tan x$

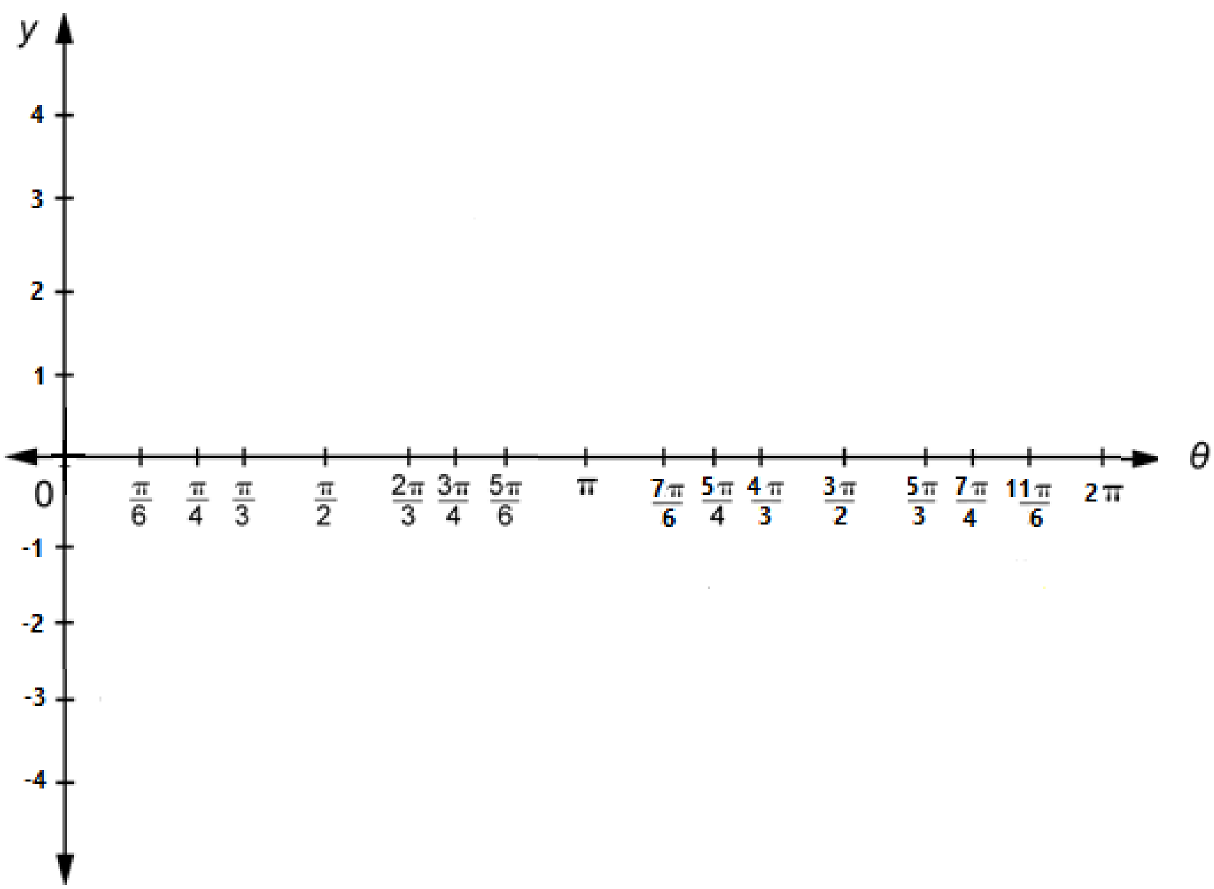
Función $y = tan\ x$																	
Ángulos especiales																	
	Primer Cuadrante				Segundo Cuadrante				Tercer Cuadrante				Cuarto Cuadrante				
x	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
y	0	0.5	1	1.7													

$y = \tan x$

$y = \tan(0) = 0$ $\quad y = \tan(30) = 0.5$ $\quad y = \tan(45) = 1$ $\quad y = \tan(60) = 1.7$

Continua con los cálculos.

Aquí, realiza tu gráfica o en tu libreta de apuntes



En la gráfica tangente, notarás que habrá valores que no están determinados, como, por ejemplo: $\tan\frac{\pi}{2} = \infty$, esto quiere decir, que su valor es extremadamente grande, el cual no se puede conocer, por lo tanto, en ese valor habrá una línea trazada imaginariamente (con la finalidad de visualizarla) denominada Asíntota Vertical, esta línea, jamás la debe cortar la gráfica, por lo que indica hacia donde se debe dirigir ambos extremos de la gráfica, tanto hacia arriba como hacia abajo. Observa algunas de las asíntotas trazadas en la figura siguiente.

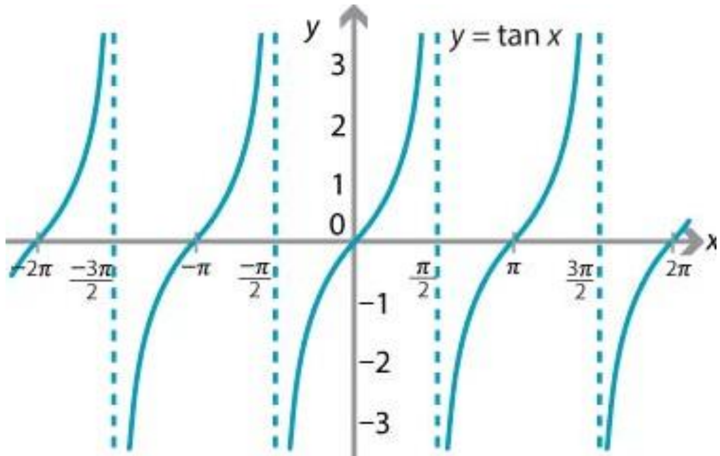


Figura tomada de internet http://estudialamardebien.blogspot.com/2017/02/hola-chicos-en-la-entrada-de-hoy.html

Evaluación:

- Esta actividad será evaluada con una lista de cotejo (Instrumento de evaluación 16)

PARA REFLEXIONAR UN POCO

La importancia del estudio de las funciones periódicas proviene del hecho de que muchos fenómenos que la ciencia estudia son periódicos. Como es conocido, las funciones trigonométricas son muy utilizadas en las ciencias naturales para analizar fenómenos periódicos tales como: movimiento ondulatorio, corriente eléctrica alterna, cuerdas vibrantes, oscilación de péndulos, ondas cerebrales, el campo electromagnético que calienta la comida en un horno de microondas, ciclos comerciales, movimiento periódico de los planetas, ciclos biológicos, etc. Se relacionan con fenómenos que se repiten periódicamente. Debido a la gran cantidad de situaciones que son periódicas, puede surgir la inquietud: ¿dónde está la importancia de estudiar las funciones trigonométricas en estos casos? La respuesta está en el teorema de Fourier que expresa que cualquier función periódica que se use en un modelo matemático puede escribirse como una combinación algebraica de senos y cosenos.

Veamos por ejemplo un electro cardiograma.

El electro cardiograma es un procedimiento de diagnóstico médico con el que se obtiene un registro gráfico de la actividad eléctrica del corazón en función del tiempo. La onda indica que las aurículas son estimuladas de forma eléctrica para bombear la sangre hacia los ventrículos.
El complejo QRS, esta parte indica que los ventrículos, las dos cavidades inferiores del corazón se están estimulando eléctricamente para bombear la sangre hacia afuera. El segmento ST, indica la cantidad de tiempo que transcurre desde la final de una contracción hasta el comienzo de periodo de reposo. Para manipularlas y estudiarlas una buena manera es aproximarse a ellas con funciones trigonométricas como las funciones seno y coseno, esta función se puede graficar ya que la actividad eléctrica del corazón es captada por unos discos de metal colocados sobre la piel y esta información se traspasa a un gráfico.

Observa la siguiente imagen.

Electrocardiograma normal de la actividad eléctrica del corazón.

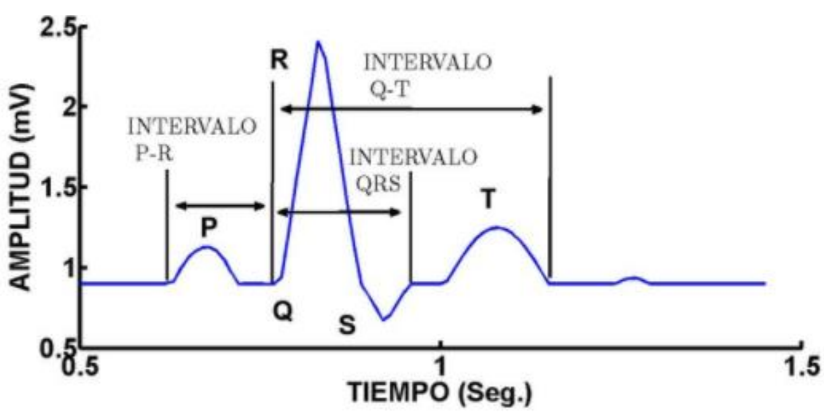


Figura tomada de internet de Díaz, Posadas y Rivas. (2014). Estudio y diagnóstico de patologías cardiacas. Memorias del XVI Congreso Latinoamericano de control automático. Recuperado el 12 de enero de 2021 de http://gg.gg/ntsxb

Actividad 3

- **Aprendizaje Esperado:** Desarrolla estrategias para obtener los valores de las funciones trigonométricas utilizando el ángulo de referencia, tablas y/o calculadora, con la finalidad de interpretar fenómenos sociales y naturales.
- **Atributo (s):** 4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.
- **Conocimiento (s):** Identidades trigonométricas: recíprocas, pitagóricas y de cociente.

Lectura previa

Lee con mucha atención el siguiente texto:

CÍRCULO UNITARIO Y LAS IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

Las identidades trigonométricas básicas conforman un grupo de propiedades que se relacionan entre sí. El interés que hay en ellas es el producto de gran número de aplicaciones dentro del mismo estudio de las matemáticas y también fuera de él.

Las identidades trigonométricas se dividen en tres grupos, *las reciprocas, las de cociente y las pitagóricas*, todas estas, pueden deducirse a partir del círculo unitario.

Iniciemos analizando las identidades pitagóricas.

IDENTIDADES PITAGÓRICAS

Así se les denomina a las identidades que resultan del teorema de Pitágoras y se obtienen a partir de un círculo unitario (*Es una circunferencia que tiene su centro en el origen y su radio es igual a la unidad, es decir, igual a 1*) mediante un triángulo rectángulo de hipotenusa 1 y catetos con longitudes sen α y cos α.

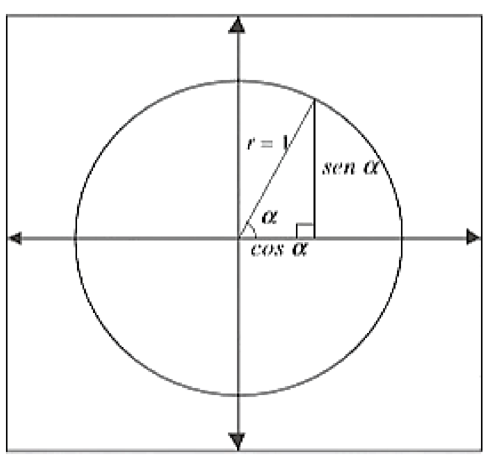


Figura tomada de libro

Por definición del teorema de Pitágoras:

$$(\text{Hip})^2 = (\text{cat})^2 + (\text{cat})^2$$

$$(1)^2 = (sen\ a)^2 + (cos\ a)^2$$

$$1 = sen^2\, a + cos^2 a$$

$$sen^2\, a + cos^2 a = 1$$

A la cual se le denomina identidad pitagórica fundamental.

En forma semejante se obtienen las demás identidades pitagóricas, entonces:

$\text{sen}^2\, a + \cos^2 a = 1$ $\qquad$ $\tan^2 a + 1 = \text{Sec}^2 a$ $\qquad$ $1 + \cot^2 a = \csc^2 a$

Obtención de las identidades trigonométricas básicas.
Para determinar las identidades se hace uso de las definiciones de las funciones trigonométricas.
En el triángulo las funciones del ángulo a se definen:

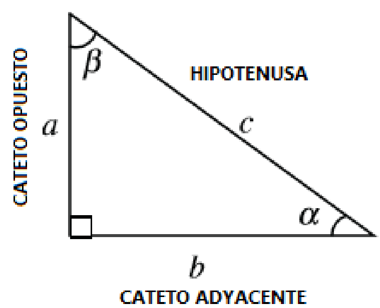


Figura recuperada de Google (reedición propia)

CO	CA	CO	CA	HIP	HIP
HIP	HIP	CA	CO	CA	CO
↓	↓	↓	↓	↓	↓
SEN	COS	TAN	COT	SEC	CSC

$\mathbf{sen}\ \boldsymbol{\alpha} = \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{c}}$ $\qquad$ $\mathbf{cos}\ \boldsymbol{\alpha} = \frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{c}}$ $\qquad$ $\mathbf{tan}\ \boldsymbol{\alpha} = \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}$

$\mathbf{cot}\ \boldsymbol{\alpha} = \frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}}$ $\qquad$ $\mathbf{sec}\ \boldsymbol{\alpha} = \frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{b}}$ $\qquad$ $\mathbf{csc}\ \boldsymbol{\alpha} = \frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{a}}$

Ahora multipliquemos cada función directa por sus recíprocas y obtendremos lo siguiente:

$$(\mathbf{sen}\ \boldsymbol{\alpha})(\mathbf{csc}\ \boldsymbol{\alpha}) = \left(\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{c}}\right)\left(\frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{a}}\right) = \mathbf{1}$$

$$(\mathbf{cos}\ \boldsymbol{\alpha})(\mathbf{sec}\ \boldsymbol{\alpha}) = \left(\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{c}}\right)\left(\frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{b}}\right) = \mathbf{1}$$

$$(\mathbf{tan}\ \boldsymbol{\alpha})(\mathbf{cot}\ \boldsymbol{\alpha}) = \left(\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}\right)\left(\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}}\right) = \mathbf{1}$$

IDENTIDADES RECÍPROCAS

De lo anterior se puede observar las identidades reciprocas.

$(\text{sen}\ \alpha)(\text{csc}\ \alpha) = 1$

$(\cos\alpha)(\sec\alpha) = 1$

$(\tan\alpha)(\cot\alpha) = 1$

IDENTIDADES DE COCIENTE

Ahora podemos observar que pasa cuando dividimos dos funciones trigonométricas, veamos por ejemplo dividir la función (sen α) por la función (cos α):

$\mathbf{sen}\ \boldsymbol{\alpha} = \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{c}}$ $\qquad\qquad$ $\mathbf{cos}\ \boldsymbol{\alpha} = \frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{c}}$

$$\frac{\mathbf{sen}\ \boldsymbol{\alpha}}{\mathbf{cos}\ \boldsymbol{\alpha}} = \frac{\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{c}}}{\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{c}}}$$

La división anterior se resuelve multiplicando extremos por extremos y medios por medios.

$$\frac{\mathbf{sen}\ \boldsymbol{\alpha}}{\mathbf{cos}\ \boldsymbol{\alpha}} = \frac{\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{c}}}{\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{c}}} \qquad\qquad \frac{\mathbf{sen}\ \boldsymbol{\alpha}}{\mathbf{cos}\ \boldsymbol{\alpha}} = \frac{\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{c}}}{\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{c}}} = \frac{\boldsymbol{ac}}{\boldsymbol{cb}} = \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}, \textbf{Se cancela "c"}$$

Observamos que el resultado corresponde a $\tan\alpha = \frac{a}{b}$
Por Tanto, de las anteriores concluimos que:

$$\tan\alpha = \frac{\text{sen}\ \alpha}{\cos\alpha}$$

$$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\text{sen}\ \alpha}$$

Hasta aquí, ya tenemos las identidades trigonométricas más usadas, por lo que ahora estudiaremos como se aplica en las matemáticas.

DEMOSTRACIÓN DE IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

Para realizar la demostración de una identidad trigonométrica se aplica procesos algebraicos como la factorización, las operaciones entre fracciones, así como su simplificación, además de las identidades trigonométricas básicas. La aplicación de estos procesos depende de la identidad en sí; esto significa que no existe un orden o procedimiento especifico, debido a esta situación se sugiere iniciar con el lado más complejo o elaborado de la igualdad, con el fin de llegar a demostrar el lado más sencillo, como puedes observar en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1

Demuestra la siguiente identidad: $\mathbf{sen\,\beta + cos\,\beta\,cot\,\beta = csc\,\beta}$

Solución: Para esta identidad se trabaja con el primer miembro para obtener el segundo.

$$\mathbf{sen\,\beta + cos\,\beta\,cot\,\beta = csc\,\beta}$$

Usamos la identidad de cociente como primer movimiento.

$$\mathbf{cot\,\alpha = \frac{cos\,\alpha}{sen\,\alpha}}$$

$$\mathbf{sen\,\beta + cos\,\beta\left(\frac{cos\,\alpha}{sen\,\alpha}\right) = csc\,\beta}$$

Seguidamente, realizamos la multiplicación de: $\mathbf{cos\,\beta\left(\frac{cos\,\alpha}{sen\,\alpha}\right) = \frac{(\boldsymbol{cos\,\beta})(\boldsymbol{cos\,\beta})}{\boldsymbol{sen\,\beta}} = \frac{\boldsymbol{cos^2\beta}}{\boldsymbol{sen\,\beta}}}$

$$\mathbf{sen\,\beta + \frac{\boldsymbol{cos^2\beta}}{\boldsymbol{sen\,\beta}} = csc\,\beta}$$

Ahora realicemos la suma algebraica de las fracciones:

$$\mathbf{sen\,\beta + \frac{\boldsymbol{cos^2\beta}}{\boldsymbol{sen\,\beta}} = \frac{sen\,\beta}{1} + \frac{\boldsymbol{cos^2\beta}}{\boldsymbol{sen\,\beta}} = \frac{(sen\,\beta)(\boldsymbol{sen\,\beta}) + (1)(\boldsymbol{cos^2\beta})}{(1)(\boldsymbol{sen\,\beta})} = \frac{sen^2\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{cos^2\beta}}{\boldsymbol{sen\,\beta}}}$$

$$\mathbf{\frac{sen^2\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{cos^2\beta}}{\boldsymbol{sen\,\beta}} = csc\,\beta}$$

Para continuar se sustituye la identidad pitagórica: $\boldsymbol{sen^2\,\beta + cos^2\beta = 1}$

$$\mathbf{\frac{1}{\boldsymbol{sen\,\beta}} = csc\,\beta}$$

Utilizamos una identidad reciproca y despejamos de ella csc β: $\mathbf{(sen\,\beta)(csc\,\beta) = 1}$

$$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{sen}\ \boldsymbol{\beta}} = \mathbf{csc}\ \boldsymbol{\beta}$$

Finalmente, queda demostrado la identidad.

$$\mathbf{csc}\ \boldsymbol{\beta} = \mathbf{csc}\ \boldsymbol{\beta}$$

Analicemos un ejemplo más, para que posteriormente, pongas en práctica lo aprendido.

Ejemplo 2

Demuestra la siguiente identidad: $\frac{\csc\theta}{\tan\theta+\cot\theta} = \cos\theta$

Solución: Se utiliza el primer miembro de la igualdad y se realiza los siguientes cambios usando las identidades reciprocas y de cociente.

$$\frac{\csc\theta}{\tan\theta + \cot\theta} = \cos\theta$$

$$\frac{\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}}{\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}} = \cos\theta$$

Como segundo movimiento, realicemos la suma del denominados:

$$\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{(\operatorname{sen}\theta)(\operatorname{sen}\theta) + (\cos\theta)(\cos\theta)}{(\cos\theta)(\operatorname{sen}\theta)} = \frac{\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta}{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}$$

$$\frac{\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}}{\frac{\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta}{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}} = \cos\theta$$

Enseguida realicemos la división, aplicando las propiedades de la división de fracciones, se multiplica extremo con extremo y medio con medio.

$$\frac{(1)(\operatorname{sen}\theta\cos\theta)}{(\operatorname{sen}\theta)(\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta)} = \cos\theta$$

$$\frac{(\operatorname{sen}\theta\cos\theta)}{(\operatorname{sen}\theta)(\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta)} = \cos\theta$$

Ahora usamos una identidad pitagórica ($\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$) y nuestra ecuación queda así:

$$\frac{(\mathbf{sen}\ \boldsymbol{\theta})\ (\mathbf{cos}\ \boldsymbol{\theta})}{(\mathbf{sen}\ \boldsymbol{\theta})(\mathbf{1})} = \mathbf{cos}\ \boldsymbol{\theta}$$

Se cancela sen θ:

$$\mathbf{cos}\ \boldsymbol{\theta} = \mathbf{cos}\ \boldsymbol{\theta}$$

Lo cual queríamos demostrar.

Ya estas listo para realizar la tercera actividad.

Actividad 3

Instrucciones:

1. Con el análisis de los ejemplos anteriores, ya puedes realizar la demostración de las siguientes identidades trigonométricas (relacionar las funciones trigonométricas con las propiedades entre ellas mediante el circulo unitario).
2. Resuelve los siguientes ejercicios en hojas de libreta o blancas, lo que tengas a la mano.

Demuestra las siguientes identidades		
Desarrollo	**Identidades Usadas**	**Resultado**
$\mathbf{sen\ x\ (1 + cot\ x) = sen\ x + cos\ x}$		
$\boldsymbol{cos\ \theta\ (1 + tan^2\theta) = sec\ \theta}$		
$\left(\frac{\mathbf{sen\ \beta}}{\mathbf{tan\ \beta}}\right)^2 + \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{csc\ \beta}}\right)^2 = \mathbf{1}$		

Evaluación:

- Esta actividad será evaluada con una lista de cotejo (Instrumento de evaluación 17)

VALORANDO MI AVANCE

Para concluir, contesta en tu libreta las siguientes preguntas con respecto de lo que aprendiste en este bloque:

- ¿Qué estoy aprendiendo?
- ¿En qué aprendizajes esperados aún tengo dificultades?
- ¿Qué acciones puedo realizar para mejorar mi desempeño?
- ¿Qué estrategias de estudio me han funcionado en este bloque?

BLOQUE VI. Triángulos oblicuángulos

Actividad 1

- **Aprendizaje Esperado:** Propone, el uso de las leyes de senos y cosenos como alternativas de solución para situaciones reales.
- **Atributo (s):** 4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.
- **Conocimiento (s):** Triángulos oblicuángulos

Lectura previa

Lee con mucha atención el siguiente texto:

La trigonometría se desarrolló a partir de los esfuerzos realizados en la antigüedad para impulsar el estudio de la astronomía y pronosticar la trayectoria y posición de los cuerpos celestes, así como para mejorar la precisión en la navegación y el cálculo del tiempo y los calendarios. Una gran parte del trabajo matemático realizado en el siglo XVIII fue producto de la necesidad de describir ciertos fenómenos físicos. Su notación y expresiones nos apoyan para representar mediante modelos matemáticos usando las propiedades de los triángulos y así poder explicar algunos fenómenos de la naturaleza.

En este bloque abordaremos dos propiedades trigonométricas importantes relacionadas con los triángulos oblicuángulos: ***Ley de Senos y Ley de Cosenos***. Aplicables únicamente para resolver triángulos oblicuángulos.

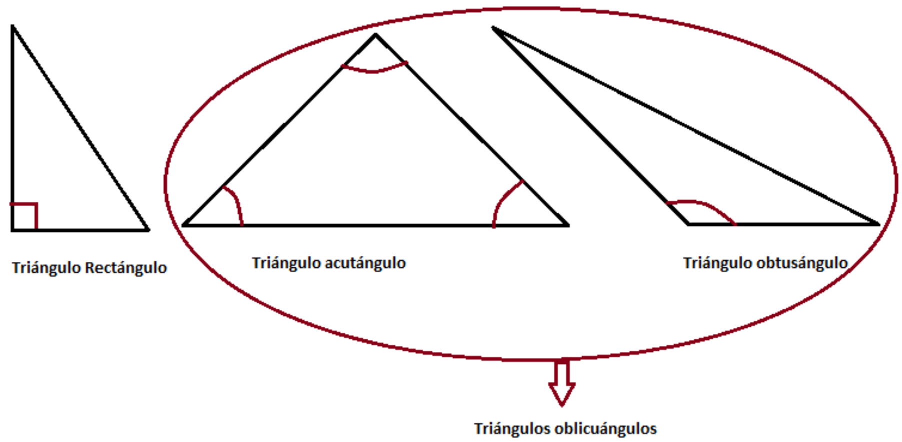
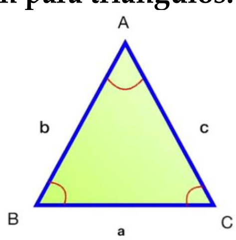
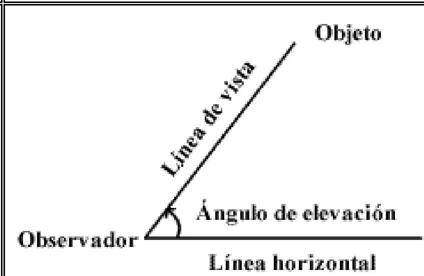
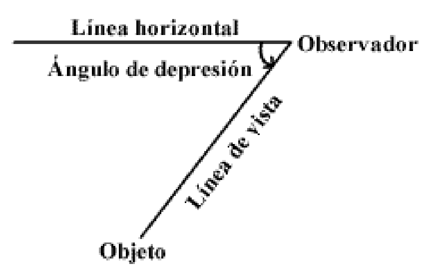
Situación Didáctica.

Una presidencia municipal se ubica en un punto C y en ella se realiza una junta con los habitantes pertenecientes a dos comunidades A y B. Los habitantes solicitan que se construya un camino que una a las dos poblaciones A y B. El director de obra municipal les pregunta los kilómetros que solicitan (es decir la distancia entre las comunidades A y B), ya que sólo tiene materiales para construir un camino de 190 km como máximo. Tomando en cuenta que las distancias de la presidencia municipal hacia las comunidades A y B son 120 km y 98 km, respectivamente además el $< ACB = 115^{0}$

¿Cómo se puede representar gráficamente la situación?

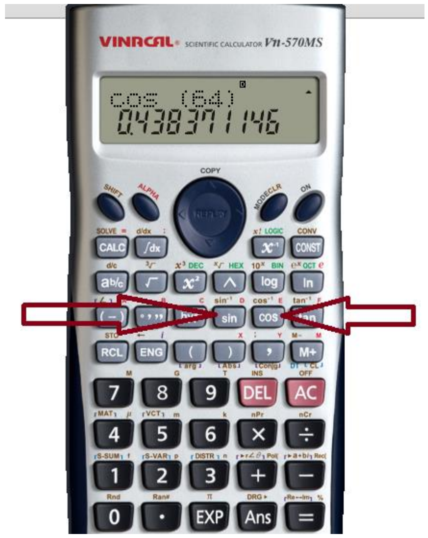
¿Es posible la solicitud de los habitantes?

¿Por qué?

CONCEPTOS PRELIMINARES	
Clasificación de triángulos de acuerdo a sus ángulos.	 **Triángulo rectángulo:** contiene un ángulo interior de 90^o. **Triángulo acutángulo:** sus tres ángulos interiores miden menos de 90^o. **Triángulo obtusángulo:** contiene un ángulo interior que mide más de 90^o.
Notación para triángulos. 	En todo triángulo denotaremos a sus vértices con letras mayúsculas y a los lados con letras minúsculas. Se sugiere que, ángulo opuesto y lado opuesto contengan la misma letra, mayúscula y minúscula, respectivamente, como se muestra en la imagen.
¿Qué significa resolver un triángulo?	Cuando decimos resolver un triángulo, nos referimos a que debemos hallar las medidas de sus tres lados y sus tres ángulos.
Suma de ángulos interiores de un triángulo.	En todo triángulo, la suma de sus ángulos interiores es 180^o.
Ángulo de elevación y de depresión	 Figura tomada de internet de http://materazonestrigonometricas.blogspot.com/2016/03/angulos-de-elevacion-y-depresion.html

<table>
<tr>
<td>Cálculo de funciones trigonométricas directas e inversa con la calculadora.

Para calcular el seno y coseno de un ángulo, utilizamos directamente las teclas sen o cos y entre paréntesis el valor del ángulo.

Para calcular el ángulo se utilizan las funciones sen^{-1} y cos^{-1} . Para esto se oprime primero la tecla shift y luego la tecla cos.</td>
<td>.



</td>
</tr>
</table>

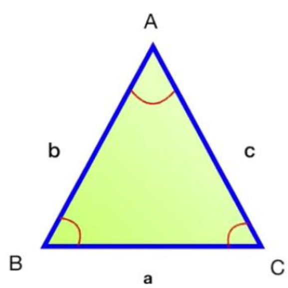
¿Ángulos en la Vida cotidiana?

Muchas son las razones por las cuales comprendemos que en ocasiones conocer el significado de algo puede resultar de gran ayuda, ya sea para nosotros o no. Tal es el caso de hallar ángulos y lados desconocidos, pues, así como su aplicación en la resolución de problemas matemáticas pueden ser aplicables en la vida cotidiana.

Tal vez resulte extraño para muchos, pero más extraño sería de una manera exacta lo que un dato podría o no hacer, pues más bien el razonamiento es que mientras conozcamos el por qué encontrar la medida de algo, ya sea algún lado o ángulo, entenderemos mejor las matemáticas. Pues más que arrojar simples soluciones y respuestas nos abre paso, a algo mucho más grande, tan grande que si la sabemos utilizar e interpretar de manera apropiada podría llegar a salvar hasta nuestra vida.

LEY DE SENOS

Los lados de un triángulo *oblicuángulo* son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos.



$$\frac{a}{\text{Sen } A} = \frac{b}{\text{Sen } B} = \frac{c}{\text{Sen } C}$$

O bien;

$$\frac{\text{Sen } A}{a} = \frac{\text{Sen } B}{b} = \frac{\text{Sen } C}{c}$$

¿Cuándo se aplica la ley de senos?

Caso 1: Si conocemos **dos ángulos** y **cualquier lado**.

Caso 2: Si conocemos dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos.

¿Cómo aplicar la ley de senos?

Depende de los datos que se conozcan en un problema, se elige alguna de las siguientes proporciones.

$$\boxed{\frac{a}{senA} = \frac{b}{senB}} = \frac{c}{senC}$$

$$\frac{a}{senA} = \boxed{\frac{b}{senB} = \frac{c}{senC}}$$

$$\frac{a}{senA} = \frac{b}{senB} = \frac{c}{senC}$$

¿Cómo saber cuál de las tres proporciones elegir?

Para una elección adecuada **debemos conocer tres de las cuatro variables involucradas**. Posteriormente aplicar una regla de tres para hallar el valor faltante.
Como se muestra a continuación.

Caso 1: Si se conocen los valores: ángulo A, ángulo B y el lado b, y deseamos hallar el lado "a".

$$\frac{a^{?}}{senA^{\checkmark}} = \frac{b^{\checkmark}}{senB^{\checkmark}} \longrightarrow a = \frac{(b)(\text{Sen } A)}{(\text{Sen } B)}$$

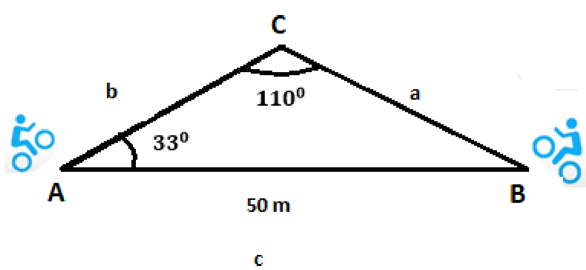
Caso 2: Si se conocen los valores: lado a, ángulo A y ángulo B y deseamos calcular el lado "b".

$$\frac{a^{\checkmark}}{senA^{\checkmark}} = \frac{b^{?}}{senB^{\checkmark}} \longrightarrow b = \frac{(a)(\text{Sen } B)}{(\text{Sen } A)}$$

	Caso 3: Si se conocen los valores: lado a, lado b y ángulo B y deseamos hallar el ángulo *A*. $\frac{a}{senA} = \frac{b}{senB} \rightarrow \text{Sen A} = \frac{(a)(\text{Sen B})}{(b)} \rightarrow A = \text{Sen}^{-1}\left(\frac{(a)(\text{Sen B})}{(b)}\right)$ **Caso 4:** Si se conocen los valores: lado *a*, lado *b* y ángulo *A* y deseamos conocer el lado *B*. $\frac{a}{senA} = \frac{b}{senB} \rightarrow B = \text{Sen}^{-1}\left(\frac{(b)(\text{Sen A})}{(a)}\right)$

Ejemplo 1

Dos ciclistas son los punteros de una carrera a campo traviesa y ambos pedalean a la misma velocidad. Con base a los datos como se muestra en la figura. ¿Quién de los dos está más cerca de la meta?



Datos

$\measuredangle A = 33^o$	a = ?
$\measuredangle B = ?$	b = ?
$\measuredangle C = 110^o$	c = 50 m

SOLUCIÓN

Primero calculamos el ángulo B.

$$\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C = 180^o$$

$$\measuredangle B = 180^o - \measuredangle A - \measuredangle C$$

$$\measuredangle B = 180^o - 33^o - 110^o$$

$$\measuredangle B = 37^0$$

Para calcular el lado a

$$\frac{a}{Sen\,A}=\frac{b}{Sen\,B}=\frac{c}{Sen\,C}$$

$$\frac{a}{Sen\,33^o}=\frac{b}{Sen\,37^o}=\frac{50\text{ m}}{Sen\,110^o}$$

$$\frac{a}{Sen\,33^o}=\frac{50\text{ m}}{Sen\,110^o}$$

$$a=\frac{(50\text{ m})(Sen\,33^o)}{Sen\,110^o}$$

$$a=28.98\,m$$

Para calcular el lado b

$$\frac{a}{Sen\,33^o}=\frac{b}{Sen\,37^o}=\frac{50\text{ m}}{Sen\,110^o}$$

$$\frac{28.98\,m}{Sen\,33^o}=\boxed{\frac{b}{Sen\,37^o}=\frac{50\text{ m}}{Sen\,110^o}}$$

$$\frac{b}{Sen\,37^o}=\frac{50\text{ m}}{Sen\,110^o}$$

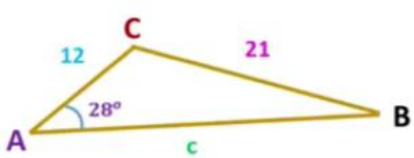
$$b=\frac{(50\text{ m})(Sen\,37^o)}{Sen\,110^o}$$

$$b=32.02\text{ m}$$

Podemos concluir que el ciclista B, está más cerca de la meta.

Ejemplo 2

Obtener los elementos que faltan en el siguiente triángulo.



Datos

$\measuredangle A = 28^o$	a = 21
$< B = ?$	b = 12
$\measuredangle C = ?$	c = ?

SOLUCIÓN

Sustituimos los datos en la expresión de la ley de senos

$$\frac{a}{Sen\,A}=\frac{b}{Sen\,B}=\frac{c}{Sen\,C}$$

$$\boxed{\frac{21}{Sen\ 28^o}=\frac{12}{Sen\,B}}=\frac{c}{Sen\,C}$$

$$\frac{21}{Sen\ 28^o}=\frac{12}{Sen\,B}$$

$$sen\,B=\frac{(12)(Sen\ 28^o)}{21}$$

$$sen\,B=0.2683$$

$$B=sen^{-1}(0.2683)$$

$$B=15.56^0$$

Calculamos el ángulo C

$$\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C = 180^o$$

$$28^o + 15.56^o + \measuredangle C = 180^o$$

$$\measuredangle C = 180^o - 28^o - 15.56^o$$

$$\measuredangle C = 136.44^o$$

Calculamos el lado C

$$\frac{a}{Sen\ A} = \frac{c}{Sen\ C}$$

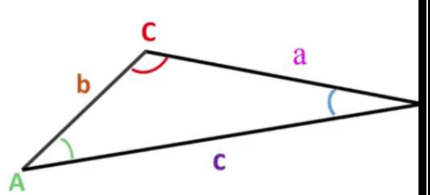
$$\frac{21}{Sen\ 28^o} = \frac{c}{Sen\ 136.44^o}$$

$$c = \frac{(21)(Sen\ 136.44^o)}{Sen\ 28^o}$$

$$c = 30.82$$

LEY DE COSENOS

El cuadrado de un lado de un triángulo oblicuángulo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados menos el doble producto de estos dos lados multiplicado por el coseno del ángulo que forman.



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ Cos\ A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\ \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\ \cos C$$

¿Cuándo se aplica la ley de cosenos?

Caso 1: Si conocemos **dos lados** y el valor del **ángulo formado entre ellos**.

Caso 2: Si conocemos sus **tres lados**.

¿Cómo aplicar la ley de Cosenos?

Para el **Caso 1** podemos hallar el lado faltante, despejando de la fórmula, como se muestra a continuación.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ Cos\ A \Rightarrow a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\ Cos\ A}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\ Cos\ B \Rightarrow b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac\ Cos\ B}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\ Cos\ C \Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\ Cos\ C}$$

Para el **Caso 2** como ya se conocen los tres lados y deseamos hallar el valor de alguno de los ángulos; realizamos el despeje de dicho ángulo, quedan como se muestra a continuación:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ Cos\ A \Rightarrow A = Cos^{-1}\left(\frac{a^2 - b^2 - c^2}{-2bc}\right)$$

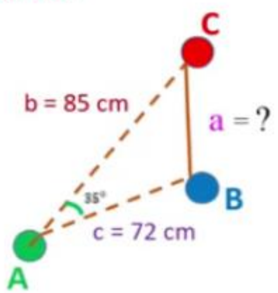
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\ Cos\ B \Rightarrow B = Cos^{-1}\left(\frac{b^2 - a^2 - c^2}{-2ac}\right)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\ Cos\ C \qquad C = Cos^{-1}\left(\frac{c^2 - a^2 - b^2}{-2ab}\right)$$

Ejemplo 3

Dos bolas de billar representadas por las letras B y C son golpeadas por una tercera, quedando a 72 cm y 85 cm del sitio donde estaban.
¿Qué tan separadas quedaron las dos bolas de billar si se alejaron del punto de impacto formando un ángulo de 35^o?

Solución.



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ Cos\ A$$

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\ Cos\ A}$$

$$a = \sqrt{(85\ cm)^2 + (72\ cm)^2 - 2(85\ cm)(72\ cm)\ Cos\ 35^0}$$

$$a = \sqrt{7225\ cm^2 + 5184\ cm^2 - 12{,}240\ cm^2 Cos\ 35^0}$$

$$a = \sqrt{12\,409\ cm^2 - 10{,}026.42 cm^2}$$

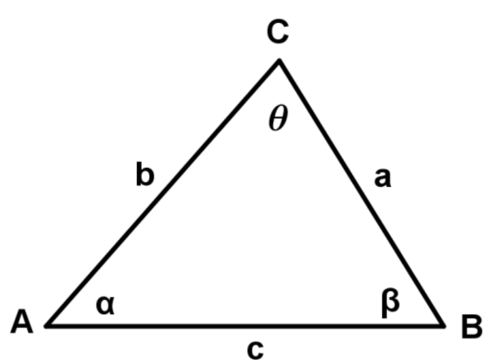
$$a = \sqrt{2{,}382 cm^2}$$

$$a = 48.81\ cm$$

Distancia a la que quedaron separadas las bolas de billar B y C

Ejemplo 4

Si $\theta = 75°$, $a = 30\ cm$ y $b = 40\ cm$. Encuentre los lados y los ángulos desconocidos en el triángulo que se muestra en la figura siguiente



Solución.

Utilizando la ley de cosenos se puede encontrar la longitud del lado c

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\,cos\,\theta$$
$$c^2 = (30)^2 + (40)^2 - 2(30)(40)cos\,75°$$
$$c^2 = 3{,}121.166$$
$$c = \sqrt{3{,}121.166}$$
$$c = 55.867 \text{ cm}$$

Por medio de la ley de senos se calculará la medida del ángulo β

$$\frac{b}{sen\,\beta} = \frac{c}{sen\,\theta}$$
$$sen\,\beta = \frac{b\,sen\,\theta}{c} = \frac{(40)sen\,75°}{55.867} = 0.6916$$

Utilizando la calculadora para obtener el valor del ángulo β en grados

$$\beta = sen^{-1}(0.6916) = 43.76°$$

Calculando la medida del ángulo α por medio de la suma de los ángulos internos de un triángulo

$$\alpha = 180° - \beta - \theta$$
$$\alpha = 180° - 43.76° - 75°$$
$$= 61.24°$$

Actividad 1

Instrucciones

1. Con los materiales disponibles al alcance (hojas recicladas, cartón de cereal, cartulina, plumones, colores, tijeras, pegamento u otros) diseñar y elaborar un dibujo relacionado con las emociones que has experimentado durante esta pandemia en la cual utilices sólo triángulos oblicuángulos.

Evaluación

- Se utilizará el instrumento 18 Lista de cotejo para evaluar dibujo

Actividad 2

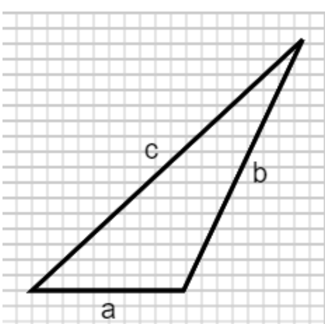
- **Aprendizaje Esperado:** Desarrolla estrategias con un pensamiento crítico y reflexivo para la solución de triángulos oblicuángulos encontrados en su contexto
- **Atributo (s):** 4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas. / 5.1 Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo cómo cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.
- **Conocimiento (s):** Triángulos oblicuángulos

Actividad 2

Instrucciones

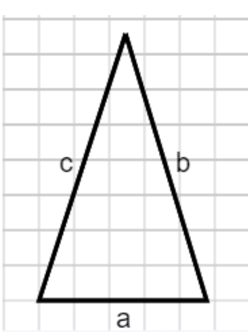
1. En cada caso se proporcionan algunos datos conocidos, aplica las leyes de Senos y/o cosenos para resolver cada triángulo oblicuángulo en la libreta.

Ejercicio 1.
Las medidas de sus lados son a = 10, b=18 y c= 24.



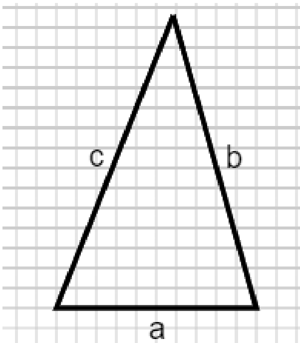
Ejercicio 2.

El lado a= 48, $< A = 35^o$ y $< C = 72^o$.



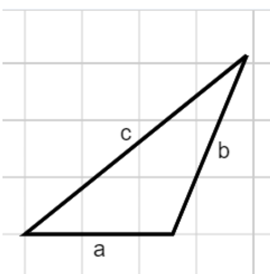
Ejercicio 3.

Lado a = 10, b= 15.2 y $< B = 68^{o}$



Ejercicio 4.

Sus lados miden a = 26, b = 34 y c = 50.



Evaluación:

- Se utilizará el instrumento 19 Rúbrica de solución de triángulos oblicuángulos.

Actividad 3

- **Aprendizaje Esperado:** Propone el uso de las leyes de Senos y Cosenos como alternativas de solución para situaciones reales.
- **Atributo (s):** 4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas. / 5.1 Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo cómo cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.
- **Conocimiento (s):** Leyes de Senos / Leyes de Cosenos

Actividad 3

Instrucciones

1. Leer el enunciado de cada problema.
2. Realizar una representación gráfica de cada problema
3. En cada problema colocar todos los datos en la representación gráfica.
4. Aplicar las leyes de senos y/o cosenos para resolver cada problema, anexando las operaciones completas de manera, clara, limpia y ordenada.

Problema 1.
Para encontrar la anchura del río Grijalva, un topógrafo selecciona los puntos A y B que están separados 61 metros en un lado del río. Entonces él escoge un punto de referencia C al lado opuesto del río y determina que las medidas de los ángulos $< BAC = 82^o$ y $< ABC = 52^o$. Calcula la distancia del punto A al punto C.

Problema 2.
Un avión vuela 240 km de la ciudad A a la ciudad B; luego cambia su rumbo 40^0 y se dirige a la ciudad C, ubicada a 162 km de B. ¿Cuál es la distancia de la ciudad A a C?

Problema 3.
Un globo aerostático se encuentra a una altitud de 412 metros sobre lo alto de una montaña que mide 1492 metros. A la par de esta montaña se ve un volcán. Desde el globo, el ángulo de depresión a la cúspide del volcán es de 37^0, y desde lo alto de la montaña, el ángulo de elevación a la cúspide del volcán es de 17^0. Determinar la altura del volcán.

Problema 4.
Un bebé mira la cara de su papá con un ángulo de elevación de 28^0. El bebé gatea y logra acercarse 2.8 metros, esto ocasiona que su ángulo de elevación se modifique a 50^0.

- ¿A qué distancia de su papá queda el bebé si la altura del papá es de 1.87 m?
- ¿A qué distancia hizo el bebé la primera observación?

Problema 5.
Un teleférico transporta pasajeros horizontalmente desde el punto A, que está a 1932 metros del punto B que se halla en la base de una montaña, seguidamente hasta un punto P de la cima de la montaña. Los ángulos de elevación de P dese A y B son 21^0 y 65^0, respectivamente.

a) Calcular la distancia entre A y P
b) Calcular la altura de la montaña.

Problema 6.
Una presidencia municipal se ubica en un punto C y en ella se realiza una junta con los habitantes pertenecientes a dos comunidades A y B. Los habitantes solicitan que se construya un camino que una a las dos poblaciones A y B. El director de obra municipal les pregunta los kilómetros que solicitan (es decir la distancia entre las comunidades A y B), ya que sólo tiene materiales para construir un camino de 190 km como máximo. Tomando en cuenta que las distancias de la presidencia municipal hacia las comunidades A y B son 120 km y 98 km, respectivamente además el $< ACB = 115^O$

a) ¿Cómo se puede representar gráficamente la situación?
b) ¿Es posible la solicitud de los habitantes?

Evaluación:

- Instrumento 20. Rúbrica solución de problemas aplicando las leyes de senos y cosenos.

VALORANDO MI AVANCE

Para concluir, contesta en tu libreta las siguientes preguntas con respecto de lo que aprendiste en este bloque:

- ¿Qué estoy aprendiendo?
- ¿En qué aprendizajes esperados aún tengo dificultades?
- ¿Qué acciones puedo realizar para mejorar mi desempeño?
- ¿Qué estrategias de estudio me han funcionado en este bloque?

INSTRUMENTOS PARA EVALUACIÓN

Instrumento 1. Lista de cotejo para calificar ejercicios de comprensión, aplicación de la definición y clasificación de los ángulos.

Atributos: 1.1 Enfrenta las dificultades que se le presentan y es consciente de sus valores, fortalezas y debilidades / 4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas

PROFESOR:	INSTITUCIÓN:
ALUMNO:	SESION:
SEMESTRE Y GRUPO:	FECHA DE APLICACION:

INSTRUMENTO DE EVALUACIÓN: LISTA DE COTEJO				
Matemáticas II	Actividad de aprendizaje			
Criterios de Evaluación	Puntos	Si	No	Observ.
Tiene orden y limpieza	10			
Entregó en tiempo y forma	10			
Copió y resolvió los ejercicios en su libreta	20			
Analiza y reflexiona los conceptos para resolver los problemas	20			
Tiene orden el procedimiento para llegar a la respuesta	20			
Identifica la clasificación de los ángulos	10			
Comprobó respuesta	10			
Calificación obtenida				

Observaciones:
____
____
____

Instrumento 2. Lista de cotejo para calificar ejercicios de dos rectas paralelas y una secante

Atributos: 1.1 Enfrenta las dificultades que se le presentan y es consciente de sus valores, fortalezas y debilidades / 4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas

PROFESOR:	INSTITUCIÓN:
ALUMNO:	SESION:
SEMESTRE Y GRUPO:	FECHA DE APLICACION:

INSTRUMENTO DE EVALUACIÓN: LISTA DE COTEJO				
Nombre del Alumno:				
Matemáticas II	Actividad de aprendizaje			
Criterios de Evaluación	Puntos	Si	No	Observ.
Tiene orden y limpieza	10			
Entregó en tiempo y forma	10			
Copió y resolvió los ejercicios en su libreta	20			
Analiza y reflexiona los conceptos para resolver los ejercicios	20			
Tiene orden el procedimiento para llegar a la respuesta	20			
Identifica los ángulos formados por dos rectas paralelas y una secante	10			
Comprobó respuesta	10			
Calificación obtenida				

Observaciones:
____
____
____

Instrumento 3. Lista de cotejo para calificar ejercicios de la aplicación de los conceptos y clasificación de los triángulos

Atributos: 1.1 Enfrenta las dificultades que se le presentan y es consciente de sus valores, fortalezas y debilidades / 4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas

PROFESOR:	INSTITUCIÓN:
ALUMNO:	SESION:
SEMESTRE Y GRUPO:	FECHA DE APLICACION:

INSTRUMENTO DE EVALUACIÓN: LISTA DE COTEJO				
Nombre del Alumno:				
Matemáticas II	Actividad de Aprendizaje			
Criterios de Evaluación	Puntos	Si	No	Observ.
Tiene orden y limpieza	10			
Entregó en tiempo y forma	10			
Copió y resolvió los ejercicios en su libreta	20			
Analiza y reflexiona los conceptos de triángulo y su clasificación para resolver los ejercicios	20			
Tiene orden el procedimiento para llegar a la respuesta	20			
Identifica los ángulos formados por los ángulos de los triángulos	10			
Comprobó respuesta	10			
Calificación obtenida				

Observaciones:
____
____
____

Instrumento 4. Lista de cotejo para calificar ejercicios de congruencia de triángulos

Atributos: 1.1 Enfrenta las dificultades que se le presentan y es consciente de sus valores, fortalezas y debilidades / 4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas

PROFESOR:	INSTITUCIÓN:
ALUMNO:	SESION:
SEMESTRE Y GRUPO:	FECHA DE APLICACION:

INSTRUMENTO DE EVALUACIÓN: LISTA DE COTEJO				
Nombre del Alumno:				
Matemáticas II	Actividad de Aprendizaje			
Criterios de Evaluación	Puntos	Si	No	Observ.
Tiene orden y limpieza	10			
Entregó en tiempo y forma	10			
Copió y resolvió los ejercicios en su libreta	20			
Analiza y reflexiona los conceptos congruencia para resolver los ejercicios	20			
Tiene orden el procedimiento para llegar a la respuesta	20			
Identifica los criterios de congruencia de los triángulos	10			
Comprobó respuesta	10			
Calificación obtenida				

Observaciones:
____
____
____

Instrumento 5. Lista de cotejo para calificar ejercicios de semejanza y teorema de Thales y teorema de Pitágoras

Atributos: 1.1 Enfrenta las dificultades que se le presentan y es consciente de sus valores, fortalezas y debilidades / 4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas

PROFESOR:	INSTITUCIÓN:
ALUMNO:	SESION:
SEMESTRE Y GRUPO:	FECHA DE APLICACION:

INSTRUMENTO DE EVALUACIÓN: LISTA DE COTEJO				
Nombre del Alumno:				
Matemáticas II	Actividad de Aprendizaje VII, VIII, IX			
Criterios de Evaluación	Puntos	Si	No	Observ.
Tiene orden y limpieza	10			
Entregó en tiempo y forma	10			
Copió y resolvió los ejercicios en su libreta	20			
Analiza y reflexiona los conceptos semejanza, teorema de Tales y de Pitágoras para resolver los ejercicios	15			
Tiene orden el procedimiento para llegar a la respuesta	15			
Identifica la diferencia de los ejercicios de semejanza, congruencia, Teorema de Tales y de Pitágoras.	10			
Plantea correctamente los problemas para su solución	10			
Comprobó respuesta	10			
Calificación obtenida				

Observaciones:
____
____
____

Instrumento 6. Lista de cotejo: Tabla de elementos de los polígonos**.**

Atributos: 4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas. /. 5.2 Ordena información de acuerdo a categorías, jerarquías y relaciones. / 5.3 Identifica los sistemas y reglas o principios medulares que subyacen a una serie de fenómenos.

PROFESOR:	INSTITUCIÓN:
ALUMNO:	SESION:
SEMESTRE Y GRUPO:	FECHA DE APLICACION:

Nº	INDICADOR	EJECUCIÓN (SI, NO)	PONDERACIÓN (%)	TOTAL	OBSERVACIONES
1	Reconoce e identifica los elementos de los polígonos.		20		
2	Llena las celdas vacías con la información correcta		40		
3	Aplica las fórmulas obtenidas		20		
5	Obtienen el resultado correcto		20		
Calificación final:					

Observaciones:
____
____
____

Instrumento 7. Rúbrica: Perímetros y áreas en mi entorno y de polígonos en general

Atributos: 4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas. /5.3 Identifica los sistemas y reglas o principios medulares que subyacen a una serie de fenómenos.

PROFESOR:	INSTITUCIÓN:
ALUMNO:	SESION:
SEMESTRE Y GRUPO:	FECHA DE APLICACION:

INDICADOR	EXCELENTE 25%	MUY BIEN 20%	REGULAR 15%
Práctica de campo	Aplica los conocimientos adquiridos en la solución de una situación de su entorno sin cometer errores	Aplica los conocimientos adquiridos en la solución de una situación de su entorno, pero comete algunos errores	Realiza las actividades, pero muestra desconocimiento del tema.
Solución de problemas	Identifica el problema a resolver, realiza los procedimientos correctos y obtiene resultados lógicos.	Identifica el problema a resolver, algunos de los procedimientos son incorrectos y los resultados erróneos.	No logra identificar el problema a resolver, por tanto, no sigue procedimientos correctos.
Áreas de figuras sombreadas	Realiza los cálculos de manera correcta.	Algunos cálculos son realizados de manera incorrecta.	Proporciona procedimientos y respuestas incorrectas.
Aprendizaje	Obtiene el aprendizaje esperado y demuestra conocimiento.	No logra el aprendizaje esperado en un 100%	Presenta deficiencias al momento de demostrar lo aprendido.

Observaciones:
____
____
____

Instrumento 8. Lista de cotejo: Expresiones artísticas con polígonos**.**

Atributos: 2.1. Valora el arte como manifestación de la belleza y expresión de ideas, sensaciones y emociones.

PROFESOR:	INSTITUCIÓN:
ALUMNO:	SESION:
SEMESTRE Y GRUPO:	FECHA DE APLICACION:

CRITERIOS	**EJECUCIÓN (SI, NO)**	**PONDERACIÓN (%)**	**TOTAL**
Utiliza diversidad de figuras geométricas.		50	
Los trazos son bien definidos.		25	
Utiliza diversidad de colores.		15	
Producto bien presentado y con limpieza		10	
Total:			

Observaciones:
____
____
____

Instrumento 9. Lista de cotejo: Reconociendo los poliedros. Cuestionario

Atributos: 4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas. /5.3 Identifica los sistemas y reglas o principios medulares que subyacen a una serie de fenómenos.

PROFESOR:	INSTITUCIÓN:
ALUMNO:	SESION:
SEMESTRE Y GRUPO:	FECHA DE APLICACION:

CRITERIOS	EJECUCIÓN (SI, NO)	PONDERACIÓN (%)	TOTAL
Realiza 10 preguntas		25	
Aborda la mayor parte de los conceptos		25	
Las respuestas son acordes a las preguntas		25	
El problema es bien planteado y está correctamente resuelto		25	
Total:			

Observaciones:
____
____
____

Instrumento de evaluación 10. Lista de cotejo. Para evaluar elementos de la circunferencia.

Atributos: 1.1 Enfrenta las dificultades que se le presentan y es consciente de sus valores, fortalezas y debilidades / 4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas

PROFESOR:	INSTITUCIÓN:
ALUMNO:	SESION:
SEMESTRE Y GRUPO:	FECHA DE APLICACION:

Criterio	Si	No	Observación
Presenta con orden, claridad, coherencia, limpieza Y puntualidad los trabajos y tareas asignadas.			
Redacta de forma coherente las definiciones de cada Elemento de la circunferencia			
Identifica cada uno de los puntos o segmentos de Forma correcta de la circunferencia.			

Observaciones:
____
____
____

Instrumento de evaluación 11. Lista de cotejo. Para evaluar ángulos en la circunferencia.

Atributos: 1.1 Enfrenta las dificultades que se le presentan y es consciente de sus valores, fortalezas y debilidades / 4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas

PROFESOR:	INSTITUCIÓN:
ALUMNO:	SESION:
SEMESTRE Y GRUPO:	FECHA DE APLICACION:

Criterio	Si	No	Observación
Presenta con orden, claridad, coherencia, limpieza Y puntualidad los trabajos y tareas asignadas.			
Redacta de forma coherente las definiciones de cada Angulo notable de la circunferencia			
Identifica cada uno de los ángulos notables de Forma correcta de la circunferencia.			
Elige las fuentes de información más relevantes para un propósito específico y discrimina entre ellas de acuerdo a su relevancia y confiabilidad.			

Observaciones:
____
____
____

Instrumento de evaluación 12. Escala de medición. Para evaluar Ejercicios sobre ángulos notables en la circunferencia.

Atributos: 1.1 Enfrenta las dificultades que se le presentan y es consciente de sus valores, fortalezas y debilidades / 4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas

PROFESOR:	INSTITUCIÓN:
ALUMNO:	SESION:
SEMESTRE Y GRUPO:	FECHA DE APLICACION:

	Nivel Logrado			
Indicador	Excelente	Notable	Satisfactorio	No logrado
Identifica los ángulos notables en cada ejercicio				
Reconoce la fórmula que aplicará para la solución del ejercicio de acuerdo a los datos del ejercicio				
Determina correctamente expresiones algebraicas que permitan calcular la medida de los datos indicados				
Realiza el cálculo de las variables involucradas				
Interpreta los resultados haciendo uso de ellas para indicar la solución del problema				
Muestra su procedimiento de manera clara y ordenada				

Observaciones:
____
____
____

Instrumento de evaluación 13. Escala de medición. Para evaluar Ejercicios sobre áreas, perímetros y áreas sombreadas en la circunferencia.

Atributos: 1.1 Enfrenta las dificultades que se le presentan y es consciente de sus valores, fortalezas y debilidades / 4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas

PROFESOR:	INSTITUCIÓN:
ALUMNO:	SESION:
SEMESTRE Y GRUPO:	FECHA DE APLICACION:

	Nivel Logrado			
Indicador	Excelente	Notable	Satisfactorio	No logrado
Aplican los elementos del círculo y la circunferencia en la solución de situaciones cotidianas.				
Presentan los procedimientos de forma ordenada y lógica.				
Expresa correctamente el resultado obtenido.				
Interpreta la solución del problema				
Admiten sugerencias para mejorar su desempeño y fortalecer su aprendizaje.				

Observaciones:
____
____
____

Instrumento 14. Rúbrica

Atributos: 4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.

Colegio de Bachilleres del Estado de Quintana Roo Plantel:				
CRITERIO	**10**	**9-8**	**7-6**	**5**
Portada.	Incluye nombre del alumno, fecha y número de evidencia.	Incluye 2 datos solicitados.	Incluye de 1 dato solicitado.	No incluye portada.
Presentación.	Está limpio, tiene orden, se lee y entiende perfectamente y usa colores.	Presenta pequeños detalles en la limpieza, legibilidad, orden y usa colores.	Presenta muchos problemas de falta de limpieza, orden, se lee y se entiende con dificultades.	Trabajo sucio, sin orden y se lee y entiende con bastante dificultad.
Elige razones trigonométricas para proponer alternativas en la solución de problemas.	Siempre elige y expresa correctamente la razón trigonométrica pertinente para solucionar problemas.	Frecuentemente elige y expresa correctamente la razón trigonométrica pertinente para solucionar problemas.	A veces elige y expresa la razón trigonométrica pertinente para solucionar problemas.	No logra elegir ni expresar la razón trigonométrica para solucionar problemas.
Portada. Presentación. Resuelve problemas.		**1.00 1.00 8.00**		

Instrumento 15. Lista de cotejo Actividad 1

Atributo: 4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.

PROFESOR:	INSTITUCIÓN:
ALUMNO:	SESION:
SEMESTRE Y GRUPO:	FECHA DE APLICACION:

INSTRUCCIONES: En registro de cumplimiento marca con una ***palomita*** los indicadores que estés cumpliendo o no estés cumpliendo, en caso de que no se haya cumplido con el indicador, escribe el motivo en la columna de observaciones. Para obtener la calificación final deberás sumar la columna de registro de cumplimiento.

No	INDICADORES DE DESEMPEÑO A EVALUAR	VALOR	REGISTRO DE CUMPLIMIENTO		OBSERVACIONES
			SI	NO	
1	Se observa su buen desempeño en el manejo de la frase nemotécnica CO CA CO CA HIP HIP.	2			
2	Completa de manera correcta la tabla de las razones trigonométricas respecto al ángulo $\measuredangle A$.	2			
3	En cuanto a los ángulos especiales, completa la tabla de manera correcta mostrando un dominio para pasar de un sistema a otro en la medición de ángulos, es decir de grados a radianes y viceversa.	2			
4	Llena de manera correcta la tabla con los signos de las funciones trigonométricas según el cuadrante en que se encuentren. (Emplea nuevamente la frase CO CA CO CA HIP HIP)	2			
5	Entrega en tiempo y forma la actividad solicitada por el profesor, por el medio que previamente acordaron (classroom, WhatsApp, Facebook, correo electrónico, presencial, entre otros)	2			
CALIFICACIÓN FINAL					

Observaciones:
____
____
____

Instrumento 16. Lista de cotejo Actividad 2

Atributo: 4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.

PROFESOR:	INSTITUCIÓN:
ALUMNO:	SESION:
SEMESTRE Y GRUPO:	FECHA DE APLICACION:

INSTRUCCIONES: En registro de cumplimiento marca con una ***palomita*** los indicadores que estés cumpliendo o no estés cumpliendo, en caso de que no se haya cumplido con el indicador, escribe el motivo en la columna de observaciones. Para obtener la calificación final deberás sumar la columna de registro de cumplimiento.

No	INDICADORES DE DESEMPEÑO A EVALUAR	VALOR	REGISTRO DE CUMPLIMIENTO		OBSERVACIONES
			SI	NO	
1	Calcula los valores correctos de la variable "y" en los casos solicitados (función coseno y tangente) con un porcentaje de asertividad de entre 85% y 100%.	2			
2	Determina de manera adecuada los pares ordenados en ambos casos, para su localización en el plano cartesiano (coseno y tangente)	2			
3	Localiza de manera correcta los puntos encontrados (pares ordenados) en el plano cartesiano y logra representar la gráfica de la función coseno y tangente.	2			
4	Escribe algunas características (mínimo cuatro) observadas sobre el comportamiento grafico de la función coseno y tangente.	2			
5	Entrega en tiempo y forma la actividad solicitada por el profesor, por el medio que previamente acordaron (classroom, WhatsApp, Facebook, correo electrónico, presencial, entre otros)	1			
CALIFICACIÓN FINAL					

Observaciones:
____
____
____

Instrumento 17. Lista de cotejo Actividad 3

Atributo: 4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.

PROFESOR:	INSTITUCIÓN:
ALUMNO:	SESION:
SEMESTRE Y GRUPO:	FECHA DE APLICACION:

INSTRUCCIONES: En registro de cumplimiento marca con una ***palomita*** los indicadores que estés cumpliendo o no estés cumpliendo, en caso de que no se haya cumplido con el indicador, escribe el motivo en la columna de observaciones. Para obtener la calificación final deberás sumar la columna de registro de cumplimiento.

No	INDICADORES DE DESEMPEÑO A EVALUAR	VALOR	REGISTRO DE CUMPLIMIENTO		OBSERVACIONES
			SI	NO	
1	Demuestra la comprensión de las identidades trigonométricas mediante la resolución de los ejercicios (Identidades pitagóricas, recíprocas y de cociente).	2			
2	Logra demostrar de manera correcta los tres ejercicios solicitados (con un margen de asertividad de entre 85% y 100%)	2			
3	En el desarrollo de las demostraciones deja evidencia de la operatividad realizada de manera lógica y correcta (orden en los pasos, adecuada sustitución, operaciones matemáticas básicas bien aplicadas).	2			
4	Da evidencia de la comprensión del tema (Aplicación de las identidades trigonométricas).	2			
5	Entrega en tiempo y forma la actividad solicitada por el profesor, por el medio que previamente acordaron (classroom, WhatsApp, Facebook, correo electrónico, presencial, entre otros)	1			
CALIFICACIÓN FINAL					

Observaciones:
____
____
____

Instrumento 18. Lista de cotejo para evaluar dibujo

Atributo: 4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.

PROFESOR:	INSTITUCIÓN:
ALUMNO:	SESION:
SEMESTRE Y GRUPO:	FECHA DE APLICACION:

CRITERIO	SI	NO	Observaciones
Menciona el nombre del dibujo.			
Utilizó varios materiales			
Es creativo			
Se observan y comprenden las emociones que refleja la imagen.			
Utilizó colores que lo hacen atractivo.			
El diseño contiene sólo triángulos oblicuángulos			
Presenta limpieza			
Es original			
Anexó una ficha en la que enlista las emociones que se representan en el dibujo			
Se entregó en tiempo, forma y medio establecido.			
Contiene datos de identificación: nombre completo, semestre y grupo.			
Total			

Observaciones:
____
____
____

Instrumento 19. Rúbrica para evaluar solución de triángulos oblicuángulos

Atributo: 4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas. / 5.1 Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo cómo cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.

Nivel de logro / Criterios	ESTRATÉGICO 10	AUTÓNOMO 9-8	BÁSICO 7-6	RECEPTIVO 5
Datos	Identifica y coloca correctamente en el triángulo los datos proporcionados.	Identifica parcialmente en el triángulo los datos proporcionados.	Identifica de manera poco precisa ene l triángulo los datos proporcionados.	Identifica de manera insuficiente en el triángulo los datos proporcionados.
Símbolos y elementos	Relaciona correctamente los elementos y su notación en el triángulo.	Relaciona parcialmente los elementos y su notación en el triángulo.	Relaciona con inconsistencias los elementos y su notación en el triángulo.	Relaciona de manera incorrecta los elementos y sui notación en el triángulo.
Incógnitas	Identifica correctamente las incógnitas de acuerdo con la notación adecuada del triángulo.	Identifica parcialmente las incógnitas en el triángulo con la notación adecuada.	Identifica con inconsistencias, las incógnitas en el triángulo de acuerdo con la notación.	No identifica las incógnitas de acuerdo a la notación de triángulos.
Procedimiento y resultados	Aplica correctamente la ley de senos y/o cosenos. Encierra todos los resultados.	Aplica parcialmente la ley de senos y/o cosenos. Encierra la mayoría de los resultados.	Presente varias inconsistencias en la aplicación de la ley de senos y/o cosenos. De manera escasa reconoce los resultados.	No aplica la ley de senos ni cosenos. No reconoce los resultados.
Propiedades geométricas y resultados	Identifica correctamente las propiedades del triángulo para el para el planteamiento de un proceso en la solución de cada triángulo. Y obtiene todos los resultados de las incógnitas.	Identifica y aplica con dificultad las propiedades de los triángulos para el planteamiento de un proceso en la solución de cada triángulo. Obtiene la mayoría de los resultados de las incógnitas.	Identifica y aplica con inconsistencias las propiedades de los triángulos para el planteamiento de un proceso en la solución de los triángulos. Sin llegar a los resultados	No visualiza las propiedades de los triángulos en el proceso de solución. No obtiene los resultados de las incógnitas.

Instrumento 20. Rúbrica: solución de problemas ley de senos y cosenos

Atributo (s): 4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas. / 5.1 Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo cómo cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.

Nivel de logro / Criterios	ESTRATÉGICO 10	AUTÓNOMO 9-8	BÁSICO 7-6	RECEPTIVO 5
Identificación del Problema	Visualización y análisis del entorno del problema y objetivo claros.	Visualización y análisis del problema con la guía del profesor.	Visualización del problema, pero se dificulta su análisis de entorno.	Mínima visualización y dificultad para analizar, necesita mucho apoyo del profesor
Delimitación del Problema	Identificación y selección de las variables del problema y jerarquiza los aspectos a resolver	Identificación de las variables implicadas y con apoyo del profesor jerarquizar aspectos a resolver	Identificación de algunas variables y necesita ayuda para identificar aspectos a resolver	Limitada capacidad para identificar los aspectos a resolver en el problema necesita guía del profesor
Conceptos Matemáticos	La explicación demuestra completamente el entendimiento de las leyes de senos y cosenos y es usado para resolver los problemas hipotéticos o relacionados a su entorno	La explicación demuestra entendimiento sustancial de las leyes de senos y cosenos y es usado para resolver los problemas hipotéticos o relacionados a su entorno	La explicación demuestra algún entendimiento de las leyes de senos y cosenos y es usado para resolver los problemas hipotéticos o relacionados a su entorno	La explicación no demuestra un entendimiento de los conceptos de las leyes de senos y cosenos y no es usado para resolver los problemas hipotéticos o relacionados a su entorno
Terminología Matemática y Notación	La terminología y notación de leyes de senos y cosenos correctas fueron siempre usadas haciendo fácil de entender lo que fue hecho.	La terminología y notación de leyes de senos y cosenos correctas fueron, por lo general, usadas haciendo fácil de entender lo que fue hecho.	La terminología y de leyes de senos y cosenos correctas fueron usadas, pero algunas veces no es fácil entender lo que fue hecho.	Hay uso inapropiado de la terminología y notación de leyes de senos y cosenos.
Estrategia/Procedimientos	Por lo general, usa una estrategia eficiente y efectiva para resolver problemas. Contiene los procedimientos de manera clara limpia y ordenada.	Por lo general, usa una estrategia efectiva para resolver problemas. Contiene la mayoría de los procedimientos.	Algunas veces usa una estrategia efectiva para resolver problemas, pero no lo hace consistentemente. Casi no se comprende el procedimiento	No usa una estrategia efectiva para resolver problemas. No contiene operaciones.
Diagramas y Dibujos	Los diagramas son claros, contiene cada una de las variables y ayudan al entendimiento de los procedimientos.	Los diagramas son claros y fáciles de entender y contienen algunas variables.	Los diagramas son algo difíciles de entender y no señala pocas variables.	Los diagramas no se entienden o no son usados ni contiene las variables.
Conclusión	Contestó de manera clara y coherente todas las preguntas que se solicitan en cada problema.	Contestó la mayoría de las preguntas de manera clara las preguntas que se solicitan en los problemas.	Contestó menos de la mitad de las preguntas de algunos problemas	No contestó las preguntas que se solicitan en cada problema.

MATERIAL SUGERIDO PARA CONSULTA

Aguilar, M. A., Bravo, V. F. V., & Gallegos, R. H. A. (2015). *Matemáticas simplificadas* (4a. ed.). Distrito Federal: Pearson Educación

Arriaga, A., Benítez, M., y Ramírez, L. (2011). *Vive las matemáticas 2*. México: Progreso Editorial.

Canseco, Méndez y Pacheco (2006). *Matemáticas II.* México: Mc Graw Hill

Carrasco, P. I. (2006). *Geometría y Trigonometría.* México: Thomson.

Carvajal, J. A. (2014). *Matemáticas II.* México: Mc Graw Hill.

Colegio Breton de los Herreros. (s.f.). *Matemáticas - Tema 4*. Consultado el 14 de diciembre de 2020. http://www.clarionweb.es/6_curso/matematicas/tema4.pdf

Colombia aprende: la red de conocimiento (s.f.). *Ángulos entre paralelas cortadas por una secante* [Archivo PDF]. Consultado el 12 de enero de 2021.
http://aprende.colombiaaprende.edu.co/sites/default/files/naspublic/plan_choco/mat_8_b2_s6_est.pdf

Cuellar, J. (2014). *Matemáticas II*. México: Mc Graw Hill Education.

Departamento de expresión Artística y tecnología. (2017). *Área de educación Plástica y visual.* https://matematicasiesoja.files.wordpress.com/2013/10/angulos-y-triangulos.pdf

Fernández, J. (s.f.). *Soy Matemáticas.com*. Consultado el 20 de diciembre de 2020. https://soymatematicas.com/teorema-de-tales/

Fuenlabrada, S. (2004). *Geometría y trigonometría*. México: McGraw Hill.

García, N., Rodríguez, S. y Sánchez A. (2018). *Matemáticas II*. México: Editorial Umbral.

Gutiérrez, C. A. (2018). *Matemáticas II.* México: Grupo Editorial Mx

Huerta, A. R. (2017). *Matemáticas II.* Colima: Conexión.

Isamar Promotor, C. A. (s.f.). *Geogebra*. Consultado el 18 de diciembre de 2020. https://www.geogebra.org/m/XhB3tt5q

Jiménez, R. (207). *Geometría y Trigonometria* . Estado de Mexico: Pearson .

Ortiz, F., Ortiz, F. y Ortiz , F. (2017). *Matemáticas 2*. México: Grupo Editorial Patria.

Rios, N. a. (2018). *Matemáticas II.* Jalisco: Umbral.

Rubiños. (s.f.). *Geometría versión Web*. Consultado el 18 de diciembre de 2020 https://geometriapdf.blogspot.com/2018/11/angulos-paralelas-ejercicios-resueltos.html

Salazar, P., Sánchez, S. (2019). Matemáticas II. México: Compañía Editorial Nueva Imagen.

Teorema Pitagoras.com. (s.f.). *Teorema Pitagoras.com*. (C. M. com, Editor). Consultado el 16 de diciembre de 2020 https://teoremapitagoras.com/

UNAM (2012). *Ángulos* [Archivo PDF]. https://www.matem.unam.mx/~barot/clases/2012-2/16angulos.pdf

Vázquez, P. S. (2017). *Matemáticas 2*. México: Nueva Imagen.

BIBLIOGRAFÍA

Aguilar, M. A., Bravo, V. F. V., & Gallegos, R. H. A. (2015). *Matemáticas simplificadas* (4a. ed.). Distrito Federal: Pearson Educación

Aldana, O. M. E., & Azar, I. J. N. (2006). *Matemáticas II: Geometría y trigonometría*. México: Dirección General de Educación Tecnológica Industrial (DGETI.

Aprendiendo con Julia (21 de marzo de 2017). Cuaderno imprimible de mandalas para colorear. Consultado el 12 de enero de 2021. https://aprendiendoconjulia.com/2017/03/cuaderno-imprimible-mandalas-colorear/

Arriaga, A., Benítez,M. & Ramirez, L. (2011). *Vive las Matemáticas.* México, D.F.: Progreso, S.A DE C.V.

Canseco, Méndez y Pacheco (2006). *Matemáticas II.* México: Mc Graw Hill

Carrasco, P. I. (2006). *Geometría y Trigonometría.* México: Thomson.

Carvajal, J. A. (2014). *Matemáticas II.* México: Mc Graw Hill.

Castillo, R. (2007). *Geometría y trigonometría.* México, D.F.: Book Mart S.A de C.V

Colegio de Bachilleres del Estado de Quintana Roo (2013). Guía didáctica: Matemáticas II. México: COBAQROO

Cuellar, J. (2014). *Matemáticas II*. México: Mc Graw Hill Education

Dirección General de Bachillerato (2017). Programa de estudio: Matemáticas II. México: DGB

Fernández, T. (14 de mayo de 2019). Círculo y circunferencia: figuras circulares. Consultado el 12 de enero de 2021. https://terefernandezvazquez.blogspot.com/2019/05/circulo-y-circunferencia-figuras.html

El País (22 de junio de 2018). Poliedros sorprendentes. Consultado el 12 de enero de 2021. https://elpais.com/elpais/2018/06/20/ciencia/1529491774_086770.html

Fuenlabrada, S. (2004). *Geometría y trigonometría*. México: McGraw Hill.

García, N., Rodríguez, S. y Sánchez A (2018). *Matemáticas II*. México: Editorial Umbral.

Gutiérrez, C. A. (2018). *Matemáticas II.* México: Grupo Editorial Mx.

Herrera, Jorge (3 de febrero de 2015). Cuadro de fórmulas de área y perímetro. Consultado el 12 de enero de 2021. https://es.slideshare.net/jorgeherreracuitiva32/cuadro-de-formulas-de-area-y-permetro

Huerta, A. R. (2017). *Matemáticas II.* Colima: Conexión.

Jiménez, R. (2007). *Geometría y Trigonometria* . Estado de Mexico: Pearson

Martínez C., M. (julio 2019). Temas para la educación. Revista digital para profesionales de la enseñanza. Consultado el 12 de enero de 2021. https://www.feandalucia.ccoo.es/docu/p5sd4961.pdf

Matemáticas 10 (s.f.). Ejemplos de polígonos. Consultado el 12 de enero de 2021. https://www.matematicas10.net/2015/11/ejemplos-de-poligonos.html

Matesblog (s.f.) Volumen de cuerpos geométricos. Consultado el 12 de enero de 2021. https://matesblog.wordpress.com/2020/03/30/volumen-de-cuerpos-geometricos/

Molina, Fernández y Barragán (s.f.). Poliedros. Consultado el 12 de enero de 2021. http://www.cs.us.es/cursos/rc/POLIEDROS.htm

Ortiz, F. (2005). *Matemáticas II, Para Bachillerato.* México, DF: Patria Cultural.

Ortiz, F. (2017). *Matemáticas 2*. México: Grupo Editorial Patria.

Patricia, E. P. (2018). *Matemáticas II.* México: Book Mart.

Profesor de dibujo (s.f.). Teoría y clasificación de cuadriláteros. Consultado el 12 de enero de 2021. https://www.profesordedibujo.com/geometria-plana/cuadrilateros/teoria-y-clasificacion-de-cuadrilateros/

Rios, N. (2018). *Matemáticas II.* Jalisco: Umbral.

Ruiz B. (2019). *Matemáticas 2.* México: Grupo Editorial Patria.

Ruiz, J. (2009). *Matemáticas 2 Geometría, trigonometría, datos y azar.* México: Grupo editorial patria

Salazar, P., Sánchez, S. (2019). *Matemáticas II*. México: Compañía Editorial Nueva Imagen.

Swokowski, E. W., & Cole, J. A. (2006). *Álgebra y trigonometría con geometría analítica. México: Cengage learning*

Vázquez, P. S. (2017). *Matemáticas 2.* México: Nueva Imagen.